CORSO COMPLETO

DI

MATEMATICHE PURE

CORSO COMPLETO

DI

MATEMATICHE PURE

DI G. B. DE SINNO

DELLA COMPAGNIA DI GESÙ

Professore nel Collegio Napolitano

DELLA MEDESIMA COMPAGNIA.

TOMO PRIMO

NAPOLI

DAI TORCHI DEL TRAMATER

Salita S. Sebastiano n.° 51.

1842.

L' AUTORE

AI GIOVANI STUDIOSI DELLE MATEMATICHE

DEL COLLEGIO NAPOLITANO

DELLA COMPAGNIA DI GESÙ.

Se al desiderio ardente, giovani ornatissimi, del profitto vostro nelle matematiche discipline, di che io pur confesso essere stato sempre mai acceso, volle attribuirsi il proporvi, che nei passati anni io feci alcuni dei più celebri in quelle scienze, imprendendo e traendo da tutti essi quanto all' uopo più acconcio ne si offeriva, non dubito io punto, che al medesimo non vogliate or voi ascrivere ciò che meco stesso ho già fermo, di presentare cioè a tutti voi per l'avvenire in luogo di sì svariate guise di autori un ordinato corso, che ricco sia del più scelto, e del più squisito, che nelle immortali opere dei più chiari fra loro mi venne dato per lungo studio di rinvenire. Conciosiachè, ove bene pongasi mente, buona parte di siffatti autori, comechè per se stessi pregiati sieno senza fine e riguardevoli; tuttavia al vantaggio della studiosa gioventù di questo Collegio riguardando, disacconci riescono e sproporzionati; ben più lunga carriera essendo richiesta a dovere sporre siccome è mestieri i lor grossi e profondi volumi, che quella non sia di tre soli anni, in che tutte soglionsi appo noi correre le matematiche discipline. Alla qual cosa vuolsi aggiugnere di vantaggio, che nè in sì breve corso di

anni è dato a voi intendere alle matematiche per siffatto modo, che non dobbiate ad altre non meno utili che difficili facoltà nello stesso tempo applicarvi. Mi si opporrà forse, aver voi degli autori non pochi, i quali a grande squisitezza accoppiano la bramata brevità: ciò sono senza fallo e per la istituzione algebrica il Paoli nel primo volume dei suoi elementi di Algebra, e per la Geometria il Le-Gendre, e il Biot per l'applicazione dell' Algebra alla Geometria, e per conto del Calcolo sublime il Lacroix nel suo compendio, ed altri siffatti statici sempre per gli anni andati in somma estimazione, ed in uso grandissimo. Ma nel vero comecchè io pur pure ciò vi consenta per un tantino, ben si parrà chiaro per altro capo il non picciolo pregiudizio, che da cotali istituzioni ai vostri studii è uopo che ne torni, tra perchè non è da negare che tratto tratto in esse non vengano incontrate delle difficoltà, che a spacciarsene come conviensi non richieggano del tempo assai, e perchè non è poi la più agevole cosa del mondo rinvenir di tutte sì ricca copia di esemplari da poterne essere tutti forniti: il che quanto ritardi i vostri scientifici avanzamenti ben lo avvisa chiunque ha in capo fior di senno. Senzachè ciò che più monta, e che mi aggiunse ai fianchi i più acuti sproni perchè a quest'opera mi mettessi, si fu non potersi altrimenti per una tal via avere quella unità d' istituzione, che sì nell' apparare di ogni altra delle sì svariate discipline, e massimamente di questa, secondochè da uomini di severo giudizio fu pronunciato, non può agguagliarsi con parole quanto vantaggiosa ed utile essa riesca a coloro, che vi abbian posta lor opera e dedicatovi l'ingegno. Sebbene, siccome a chi ha presa ben lunga esperienza nell' ammaestrarvi in matematica venne conosciuto, non debbo io per conto alcuno concedervi, che si abbiano i sullodati autori quel bel pregio di brevità, che è alla fine il segno delle

nostre ricerche. Ma in somma vi ha di altri corsi ancora, i quali e brevi sono, e non pertanto sgombri di quelle difficoltà, che agli autori testè citati pur voglionsi ascrivere. Sì bene: anzi pur faticosa briga io mi darei solamente, che ne imprendessi a tessere il lungo catalogo: nulladimeno tanto meritevolmente ci restiamo di adoperarli, quanto essi per lunghissimo spazio lontani sono da quella esattezza e perfezione, a che veggiamo essere questa scienza ai nostri dì pervenuta.

Non vorrei però, che vi aspettaste da me in questo qual che egli siasi mio lavoro nuove dimostrazioni e peregrini ritrovamenti; chè non è egli obbligo di chi prende a formare una istituzione elementare di nuove cose arricchir la scienza, ma riesce sufficientissimo al suo intendimento dar forma ed ordine acconciamente ai ritrovati altrui. È stato peraltro mio pensiero soddisffar pienamente a quanto dal bel principio vi ho promesso, studiandomi, quanto per le debole mie forze ne fu conceduto, di raccogliere dai più rinomati matematici il più e il meglio che hanno, e di adattarlo alla capacità vostra; non tralasciando eziandio tal fiata di rimettervi, con opportune citazioni laddove le occorrenti materie vennero da loro profondamente trattate. E questo sì feci perchè possiate di leggieri, ove ne venga talento, tutta attignere quella dottrina nei proprii fonti, da cui io derivandola procacciai di farvi comunque gustare.

Partimmo adunque questo nostro corso in tre volumi di tal che nel primo, si contenessero quelle materie, che al primo anno si appartengono, quali sono l' Aritmetica, l' Algebra, e la Geometria piana e solida; nel secondo avessero luogo un trattato di Logaritmi, la Trigonometria piana e sferica, la Geometria analitica, e le Sezioni coniche, le quali cose al secondo anno si spettano; nel terzo da ultimo il Calcolo differenziale ed integrale formasse il subbietto da com-

piere i tre anni dello studio delle matematiche che diconsi pure. A dar poi chiarezza e a facilitare l'intendimento, secondo che la natura delle materie comportarono, usammo in esponendole di proposizioni e di problemi, non potendosi sufficientemente dire quanto un cotal metodo faccia, massimamente nei principianti, a fermar nella memoria queste per altro astratte cotanto, ed astruse teorie.

Pertanto se nè lusinga di sordido interesse, nè allettamento di onorata rinomanza o di alcun altro di siffatti emolumenti, mi ha mosso a durar questa qual che siasi non però lieve fatica, ma sì il solo vostro profitto nelle matematiche discipline; per voi stessi bene avvisate quanto secondo ragione io ne richiegga e ne addimandi, che con l'assiduo vostro studio, e con la sollecita vostra diligenza (di che io non potrei di sì gentili animi, e delle matematiche sì nobilmente infiammati senza grande oltraggio pur dubitare) diate opera che a quel lieto fine prosperamente riesca, a che è stata indiritta unicamente ed ordinata.

CORSO COMPLETO

di

MATEMATICHE PURE

LIBRO PRIMO

ARITMETICA

CAPO I.

DEL MODO DI SCRIVERE E DI PRONUNCIARE I NUMERI.

1. La matematica è la scienza della quantità, e si versa tutta nel paragonare fra di loro le grandezze, in quanto queste capaci sono di aumento o di decremento, e nella investigazione delle relazioni scambievoli che quindi nascono. Infatti egli è pur certo che volendo misurare una qualunque grandezza per un'altra che sia della medesima specie, presa questa per unità di misura, agevolmente conseguir potremo la espressione numerica della prima; donde manifesto si rende poter noi esprimere con numeri le grandezze, e delle relazioni che hanno luogo fra numeri giovarci ad ottener quelle che passano tra le grandezze. Per la qual cosa dovendo proporsi a giovani una istituzione di matematica, conviene prendere le mosse dall'Aritmetica, da quella parte cioè delle matematiche che tutta si occupa intorno alle operazioni su i numeri, le quali sono l' *addizione* e la *sottrazione*, alle quali riduconsi le altre, vale a dire la *moltiplicazione* e la *divisione*, come quindi a poco si farà chiaro; a tutte queste potrebbero aggiugnersi quelle che riguardano l'innalzare a potenze, e l'estrarre radici, di cui per altro tornerà più acconcio trattare nell'Algebra. Parleremo adunque delle prime quattro brievemente tostochè si sarà accennato alcuna cosa intorno al modo di notare i numeri e di pronunciarli.

2. Nell'Aritmetica decadica, della quale solamente dobbiamo trattare, tutti i numeri possono disegnarsi con le sole dieci seguenti cifre

0 (zero), 1 (uno), 2 (due), 3 (tre), 4 (quattro), 5 (cinque), 6 (sei), 7 (sette), 8 (otto), 9 (nove)

nè vi ha bisogno di altre. Perocchè primieramente il numero *dieci*, cioè la decina di unità semplici, potendosi considerare come unità delle decine, può chiamarsi unità di secondo ordine riguardo alla unità semplice che si appella di primo. Adunque potremo, senza ricorrere ad altra sorta di cifre, dire

1 decina, 2 decine, 3 decine, ec.... 9 decine,

ovvero

1 unità di 2° ordine, 2 unità di 2° ordine, 3 unità di 2° ordine,... 9 unità di 2° ordine;

e quindi sarà agevole servirci di quelle cifre onde esprimere ancora qualunque numero che sia minore del *centinaio*, minore cioè di dieci decine di unità semplici. Ad esempio debba in tal guisa dinotarsi il numero cinquantaquattro, giusta il detto si scriverà esso nel modo seguente:

5 decine, e 4 unità,

ovvero nel seguente:

5 unità di 2.° ordine, e 4 unità di 1.° ordine.

In secondo luogo il centinaio di unità semplici o di primo ordine formandosi con dieci decine, vale a dire con una decina di unità di secondo ordine, potrà riguardarsi come unità di terzo ordine, cioè come unità delle decine delle unità di secondo ordine; donde chiaro si scorge che ad esprimere ancora tutti gli altri numeri minori del migliaio opportune all' uopo riescono le succennate cifre. Ci valga per esempio il numero seicento cinquantaquattro, secondo che or qui è detto, questo numero si scriverà in tal guisa

6 centinaia, 5 decine, 4 unità,

ossia nell' altra

6 unità di 3.° ordine, 5 unità di 2.° ordine, 4 unità di 1.° ordine.

Dippiù un migliaio di unità di primo ordine è composto di dieci centinaia, vale cioè una decina di unità di terzo ordine, che però dicesi unità di quarto ordine, unità cioè delle decine delle unità di terzo ordine. Laonde ad esprimere il numero settemila seicento cinquantaquattro, potendoci servire della seguente scrittura

7 migliaia, 6 centinaia, 5 decine, e 4 unità,

potremo pure notarlo nella maniera che segue

7 unità di 4° ordine, 6 unità di 3° ordine, 5 unità di 2° ordine, e 4 unità di 1° ordine.

Le cifre dunque 1, 2, 3,...9 valgono altresì ad esprimere i numeri minori di diecimila. Con simili riflessioni resterà ciò fermo in generale per un numero qual che egli siasi.

3. Per altro lo scopo cui mirano gli aritmetici nel sostituire delle cifre alle parole esprimenti i numeri, è di renderne semplice la scrittura; or certamente questo non si otterrebbe ove dovessero i medesimi esporsi nella maniera precedentemente indicata. Per la qual cosa si convenne fra gli aritmetici di togliere di mezzo le cifre quelle parole: unità, decine, centinaia, ec. ovvero le altre: unità di 1.° ordine, unità di 2.° ordine, unità di 3.° ordine, ec. in guisa che di più cifre situate le une immediatamente a fianco alle altre, si esprimesse un numero, di cui la prima cifra, a cominciare dalla destra, ne dinotasse le unità di primo ordine, la seconda ne determinasse quelle di secondo ordine, la terza quelle di terzo ordine, ec. progredendo cioè dalla destra alla sinistra la prima segnasse le semplici unità, la seconda le decine delle semplici unità, la terza le centinaia ossia le decine delle decine delle semplici unità, ec. Si guardi la seguente tavola

OCCUPANO IL LUOGO											
	11.mo	10.mo	9.no	8.vo	7.mo	6.to	5.to	4.to	3.zo	2.do	1.mo
ec. ec. ec.	le decine di bilioni	i bilioni	le centinaia di milioni	le decine di milioni	i milioni	le centinaia di migliaia	le decine di migliaia	le migliaia	le centinaia di unità semplici	le decine di unità semplici	le unità semplici

Ciò posto i numeri che precedentemente ci han serviti di esempio potranno con molto più di semplicità segnarsi soltanto come segue 54; 654; 7654.

4. Considerando ora attentamente la tavola, verremo in chiaro, potersi la medesima dividere in classi, delle quali ciascuna contenga solamente tre luoghi, cioè la prima composta sia di unità decine e centinaia di unità semplici, la seconda di unità decine e centinaia di migliaia, la terza di unità decine e centinaia di milioni, la quarta di unità decine e centinaia di bilioni, e così di seguito. Ove poi in un qualche luogo manchino o le unità o le decine o le centinaia, sia della classe delle unità semplici, sia di quella delle migliaia, sia dell'altra dei milioni ec. è solito adoperarsi la cifra 0. In tal guisa si manterrà inalterato il valore delle altre cifre, come dagli esempii che più sotto soggiugneremo potrà rilevarsi agevolmente.

5. Da quanto è detto finora senza veruna difficoltà potranno i giovani scrivere o leggere un numero dato qualunque; peraltro intorno al pronunciare i

numeri dovrà avvertirsi di prima partirne le cifre a tre a tre incominciando dalla destra, onde con più di agevolezza conoscere le classi che essi contengono, e quindi imprenderne la lettura dalla sinistra progredendo verso la destra. Sia per esempio il numero

734567038

il quale, dividendo le cifre in classi, contiene la classe delle unità semplici, quella delle migliaia, ed una terza dei milioni; si pronuncierà dunque questo numero nel modo seguente: settecento trentaquattro milioni, cinquecento sessantasette mila, e trentotto. Dippiù il numero

30476921110000720

si pronuncierà come segue: trenta quatrilioni, quattrocento settantasei trilioni, novecento ventuno bilioni, cento dieci milioni, settecento venti. Finalmente pel numero

300004200036710000000

si direbbe: trecento quintilioni, quattro quatrilioni, duecento trilioni, trentasei bilioni, settecento dieci milioni.

6. Dicemmo sopra (1) che una grandezza qualunque può misurarsi per un'altra che sia della medesima specie, e che si abbia come unità di misura: ad esempio un' altezza potrà misurarsi per una seconda altezza che rispetto alla prima dicasi uno, qual sarebbe un palmo, un piede, un metro, ec. Or se la grandezza che si considera come uno, concepiscasi divisa in più parti uguali, e di queste alcune soltanto si prendano, avremo una grandezza minore della unità, vale a dire una *frazione* propriamente detta. Or siffatta operazione indicasi semplicemente con due numeri, di cui il primo dinoti in quante parti siasi divisa la unità, e dicesi *denominatore*, l'altro rappresenti il numero delle parti che si son prese, e si appella *numeratore*, il quale vuole scriversi sopra il denominatore, e vien dal medesimo separato con una linea. In tal guisa ove si voglia esprimere numericamente un' altezza minore di quattro, maggiore però di tre piedi, dividendo il piede, che è la unità di misura, in dodici parti uguali, e supponendo che la succennata altezza sorpassi i tre piedi di sole cinque di queste parti, si avrà la espressione numerica dell'altezza medesima con 3 e la frazione $\frac{5}{12}$ (cinque dodicesimi).

7. I numeri dunque che da una o più cifre possono rappresentarsi, vogliono dividersi in *interi* e *fratti*, ed amendue diconsi *razionali*. Devesi peraltro avvertire che anche altri numeri, i quali maggiori sono della unità, si nominano, quantunque impropriamente, numeri fratti, per la ragione che essi ancora presentansi sotto la forma di frazioni: ad esempio la espressione $\frac{9}{4}$ (nove quarti) vuol dire che la unità dividesi in quattro parti uguali, e la grandezza che vien rappresentata dal numero $\frac{9}{4}$ ne contiene nove, la qual cosa ugualmente e con più di proprietà si esprime dicendo, che quella grandezza uguaglia due unità con una quarta parte della medesima, cioè $\frac{9}{4}$ è uguale a 2 con la frazione $\frac{1}{4}$.

8. Resta ora a dire della scrittura di quei numeri fratti che chiamansi *de-*

cimali. Dalla convenzione per la scrittura dei numeri interi riferita di sopra (3), ed adottata universalmente, chiaro apparisce che, andando da sinistra a destra, il valore delle cifre è dieci volte minore; ad esempio delle cifre che indicano migliaia quelle che vengono dopo a destra segneranno le centinaia, ossia le parti decime delle migliaia; dippiù se dalle cifre che segnano le centinaia si passi a quelle che sono più a destra, queste esprimeranno le decine di semplici unità, cioè le parti decime delle centinaia; e così ancora le cifre che le semplici unità rappresentano si trovano a destra dopo quelle che ne sono dieci volte maggiori, dopo quelle cioè che segnano le decine. Ciò presupposto era naturalissimo il venir in mente agli Aritmetici di esprimere le parti decime della unità con cifre situate a destra dopo le semplici unità, le parti centesime con altre poste a destra dopo queste ultime, le millesime con quelle messe a destra dopo le centesime, e così di seguito delle parti diecimillesime, centomillesime, milionesime, ec. separando però tutto il complesso delle cifre che indicano queste parti frazionarie da quelle che esprimono le intere unità con una virgola; in tal modo il numero

$$35,2406$$

dinoterà trentacinque unità, due decimi della unità medesima, quattro centesimi, niun millesimo, sei diecimillesimi. Or egli è evidente che il decimo della unità equivale a dieci centesimi, un centesimo a dieci millesimi, un millesimo a dieci diecimillesimi, ec... che però due decimi sono uguali a due mila diecimillesimi, quattro centesimi a quattrocento diecimillesimi: adunque il numero

$$35,2406$$

si pronuncia ancora così: trentacinque unità, e duemila quattrocento sei diecimillesimi.

9. Dal detto (8) agevolmente si pronuncieranno eziandio i numeri

$$2,023;\ 0,0026$$

dei quali il primo rappresenta due unità, niun decimo, due centesimi, e tre millesimi, quindi si pronuncierà così: due unità e ventitre millesimi; il secondo non ha unità intere, non ha decimi nè centesimi, ma solamente contiene due millesimi e sei diecimillesimi, che però si dirà solamente ventisei diecimillesimi.

10. I tre numeri 35, 2406; 2, 023; 0, 0026 possono eziandio dinotarsi come segue (6)

$$35 \text{ e } \frac{2406}{10000},\ 2 \text{ e } \frac{23}{1000},\ \frac{26}{10000}$$

Donde chiaro apparisce che tutte le frazioni le quali hanno per denominatori numeri decadici, e che con nome proprio diconsi *decimali*, vogliono scriversi nella guisa già indicata di sopra (8): ad esempio le frazioni $\frac{7}{10}$, $\frac{3}{100}$, $\frac{9}{1000}$, sono le stesse che le seguenti 0, 7; 0, 03; 0, 009. Una più distinta idea dei fratti tanto ordinarii che decimali si acquisterà allorchè tratteremo delle loro principali proprietà, e delle operazioni che su i medesimi s' istituiscono. Ciò pertanto basti aver detto intorno allo scrivere e pronunciare i numeri.

11. Pria però di andar oltre fa d' uopo avvertire ciò che dal fin qui detto può senza veruna difficoltà rilevarsi, che cioè una data grandezza non potrà esattamente rappresentarsi da numeri razionali, ove o la unità di misura esattamente non la divida, o divisa che sia siffatta unità in qualsivoglia parti uguali, non possa giugnersi a tali parti che accurata ne rendano la cercata misura (6).

In tali circostanze aumentandosi sempre più il numero delle parti uguali in cui dividesi la unità, e per conseguenza diminuendosi di continuo queste parti medesime, decresceranno incessantemente quelle porzioni della data grandezza, le quali impediscono perchè le singole misure non risultino esatte. Per la qual cosa non curandosi di tali residue porzioni, per ciascuna delle succennate misure otterremo diversi numeri razionali, i quali sebbene non rendano esatta la espressione numerica della data grandezza, ciò non pertanto alla medesima sempre mai si avvicineranno. Siffatta espressione alla quale i suddetti numeri razionali si accostano sempre più di un qualunque altro determinato numero razionale, comunque piccolo, devesi riguardare come limite dei medesimi, e numero *irrazionale* chiamasi. Dei numeri irrazionali ci verrà fatto altra volta di trattare più di proposito, gioverà non però averne in questo luogo detto alcuna cosa.

CAPO II.

DEI NUMERI INTERI.

12. Ad un numero qualunque aggiugnerne un secondo vale lo stesso che far prendere al primo un incremento uguale al secondo: il numero poi che si ottiene per siffatta operazione chiamasi *somma*. I numeri che debbono fra loro sommarsi vogliono essere *omogenei*, cioè della medesima specie (*). Dei numeri interi rappresentati da una sola cifra di leggieri potrà eseguirsi l' addizione a memoria.

Per quello poi che si appartiene ai numeri interi che si esprimono con più di una cifra, la somma si otterrà nel modo indicato dal seguente esempio. Vogliansi aggiugnere insieme i quattro numeri

$$32478, 397, 96061, 42.$$

A conseguirne la somma si scriveranno primieramente gli uni sotto gli altri, avvertendo di disporli in guisa che le unità del medesimo ordine si trovino in una

(*) I numeri possono considerarsi in due maniere diverse: la prima è la tenuta finora da noi, non indicando cioè la specie di cosa o di unità alla quale essi si riferiscono, e così diconsi *numeri astratti*; ovvero cennando la specie delle loro unità, come quando si dice: due uomini, quattro alberi, sei palagi, ec. ed allora si nominano *numeri concreti*. I numeri concreti diconsi *omogenei* o *della medesima specie*, allorchè rappresentano collezioni di unità della medesima specie, quantunque siffatte unità sieno alcuna volta di grandezza diversa: ad esempio 25 ducati, 15 carlini, 85 grana sono numeri omogenei perchè quantunque sieno composti di unità di diversa grandezza, esprimono però tutti moneta. Chiamansi poi numeri *eterogenei o di diversa specie* quelli che rappresentano collezioni di unità di specie differente: così 15 uomini, 25 alberi sono numeri eterogenei.

stessa colonna, quindi si condurrà una linea, onde separarli dalla risultante somma, la quale vorrà scriversi al di sotto di questa linea.

```
 32478
   397
 96061
    42
------
128978
```

Cominciando adunque dalla colonna delle unità dicasi · 8 aggiunto a 7 dà 15, 15 ad 1 dà 16, 16 a 2 dà 18, dall'aggiugnere pertanto insieme le semplici unità si è ottenuta una decina ed otto di siffatte unità. Che però segnando 8 nel luogo delle unità ritengasi la decina onde sommarla con le altre poste alla seconda colonna dicendo: 1 aggiunto a 7 dà 8, 8 a 9 dà 17, 17 a 6 dà 23, 23 a 4 dà 27; si ottengono cioè due centinaia e sette decine. Notando quindi 7 al luogo delle decine, trasmettansi le due centinaia alla seguente colonna che è quella delle centinaia dicendo: 2 aggiunto a 4 dà 6, 6 a 3 dà 9. Ponendo 9 al luogo delle centinaia si progredisca alla colonna delle migliaia, e si avrà 2 aggiunto a 6 uguale ad 8. Segnando 8 al luogo delle migliaia si passi alle decine delle migliaia; 12 essendo la somma di 3 e 9, si avrà un solo centinaio di migliaia e due decine di migliaia. Scrivendo dunque 2 ed 1 nei proprii luoghi (5.° e 6.°) si conseguirà la cercata somma dei quattro numeri dati, la quale sarà 128978.

13. La regola dunque generale per sommare i numeri interi può esprimersi con la seguente proposizione. *Avendo scritto i numeri da sommarsi insieme nel modo sopra* (12) *indicato, i numeri di ciascuna colonna, cominciando dalla destra si sommino fra di loro riguardandoli come unità, se la somma che quindi si otterrà non sorpassa 9, scrivasi tutta intera sotto la medesima colonna, ove poi questa somma contenga delle decine, scritte le sole unità sotto quella colonna, trasmettansi alla seguente altrettante unità quante sono queste decine onde sommarle con le altre che quivi si trovano; finalmente eseguita la somma nella colonna ultima, scrivasi questa somma tal quale risulta dalla operazione.* La ragione dell'operare in siffatta guisa conseguita dal perchè, mentre da una colonna qualunque si progredisce all'altra che segue verso la sinistra, i valori delle cifre nel luogo susseguente debbono tenersi per dieci volte maggiori di quelli delle altre che trovansi nel luogo precedente. I seguenti esempii potranno servirci di esercizio.

```
 7861      66947    4649
  345      46742     928
 8023     132684    9298
-----     ------   -----
16229     246373   14875
```

14. Da un numero qualunque sottrarne un altro è l'istesso che assoggettare il primo numero, che dicesi *minuendo*, ad un decremento uguale al secondo, che chiamasi *sottraendo*: al numero poi che da siffatta operazione risulta si dà nome di *differenza*, ovvero di *residuo*. Donde chiaro apparisce che il residuo è

un tal numero, al quale aggiunto il sottraendo si otterrà il minuendo. È inutile l' avvertire che cotesti numeri debbono essere della medesima specie: dippiù che quante volte i numeri interi sieno di una sola cifra e vogliano sottrarsi da altri simili, la sottrazione è agevole ad eseguirsi a mente.

Per quanto poi si attiene alla sottrazione dei numeri interi composti di più di una cifra, il numero sottraendo si scriverà sotto il numero minuendo avvertendo di notare le unità del medesimo ordine le une sotto le altre; quindi condotta una linea, si cominceranno a sottrarre le unità semplici dalle unità semplici, le decine dalle decine, le centinaia dalle centinaia, e così di seguito, notandone i singoli residui sotto la linea nei proprii luoghi. In tal guisa si otterrà la differenza dei due numeri dati. Vogliasi ad esempio sottrarre il numero 3104 dall' altro 267896; scrivasi il primo sotto il secondo nel modo che quì si vede:

$$\begin{array}{r} 267896 \\ 3104 \\ \hline 264792 \end{array}$$

Condotta poi la linea dicasi: da 6 tolto 4 resta 2; da 9 tolto 0 resta 9; da 8 tolto 1 resta 7; da 7 tolto 3 resta 4. Or perchè dalle due ultime cifre 6, 2 del numero minuendo niuna cifra sottrar si deve, farà d' uopo scriverle immediatamente dopo i parziali residui 2, 9, 7, 4; si avrà quindi per la cercata differenza 264792.

15. Accadendo spessissimo che alcuna delle cifre del numero sottraendo non possa sottrarsi dalla corrispondente nel minuendo, per la ragione che questa è minore di quella, la regola da tenersi in questo caso è la seguente: la minore cifra si aumenterà di dieci unità le quali si prenderanno dalla cifra che immediatamente la segue a sinistra: per la qual cosa dovrà questa nel seguito della operazione giudicarsi come diminuita di una unità (3). Debba per esempio da 3581 sottrarsi 2974.

$$\begin{array}{r} 3581 \\ 2974 \\ \hline 607 \end{array}$$

La cifra inferiore 4 non potendo sottrarsi dalla superiore 1, aggiugnendo a questa dieci unità, si dirà: da 11 tolto 4 resta 7. In seguito dalle otto decine che nel minuendo seguono immediatamente, dobbiamo toglierne una per ragione delle dieci unità aggiunte ad 1: quindi da 7 tolto 7 resta 0. Andando innanzi nella sottrazione, poichè da 5 non può togliersi 9, si aggiugneranno di bel nuovo al 5 dieci unità, che però da 15 tolto 9 resterà 6. Togliendo ora un migliaio da quelle tre che nel minuendo vengono indicate dalla ultima sua cifra 3, per compensare così le dieci centinaia aggiunte alle segnate dalla penultima cifra 5, si dirà: da 2 tolto 2 resta 0; quindi la cercata differenza sarà 607.

16. Un tal modo di operare, ove uno o più zeri conseguitano quella cifra significativa che devesi aumentare di dieci unità, ha bisogno di una particolare riflessione. Imperocchè allora dalla cifra significativa che vien dopo tutti gli zeri dovrà prendersi una unità; or questa unità trasportata immediatamente al luogo dell' ultimo zero, quivi avrà il valore di dieci; allora da questa decina prende-

rassi una unità che si trasporterà al luogo del penultimo zero, dove parimenti varrà una decina; e così di seguito, finchè si giunga alla cifra che devesi far crescere di dieci unità. In siffatta guisa la cifra, la quale precede gli zeri, si aumenterà di dieci unità, tutti gli zeri si cangeranno in 9, e la cifra che immediatamente vien dopo questi zeri si diminuirà di una unità. Eccone un esempio

70002
30495
39507

Non potendo togliere le cinque unità del sottraendo dalle due del minuendo, dicasi: da 12 tolto 5 resta 7; quindi da 9 tolto 9 resta 0; da 9 tolto 4 resta 5; da 9 tolto 0 resta 9; da 6 tolto 3 resta 3. Questo metodo si spiega ancora bene nella seguente maniera: nell' esempio, dalle 2 unità del minuendo non potendosi sottrarre le 5 del sottraendo, si prendano 10 unità dalle 70000 espresse dalla cifra significativa 7, resteranno 69990 unità; unendo dunque le dieci unità già prese alla cifra 2, il numero 70002 si troverà decomposto nei due 69990 e 12, e togliendo da quest' ultimo le 5 unità, avremo 7 pel residuo delle unità. Or per siffatta operazione, la quale ha lasciato nel minuendo 69990 unità, ovvero 6999 decine, invece delle 7000, si sostituiscono ai tre zeri altrettanti 9, e si diminuisce di una unità la cifra significativa 7, la quale è la prima che dopo gli zeri s' incontra verso la sinistra; quindi sarà facile ottenere il restante residuo nel modo or ora indicato.

17. Dal detto (14. 15. 16) conseguita la regola generale per la sottrazione dei numeri interi, la quale viene espressa dalla proposizione seguente. *Avendo situato il sottraendo sotto il minuendo in modo che le unità del medesimo ordine si trovino nella stessa colonna, e condotta la linea, onde separare questi numeri dal residuo, si toglierà successivamente in ciascuna colonna, cominciando dalla destra, il numero inferiore dal superiore; ove ciò non potrà eseguirsi, si accrescerà la cifra superiore di 10 unità, considerando la prima cifra significativa, che le vien dopo a sinistra, come diminuita di una unità, e riguardando gli zeri intermedii, qualora s' incontrino, come altrettanti 9.* Eccone degli esempii per esercizio.

16844	103034	49812002
9786	69845	18924983
7058	33189	30887019

18. Gioverà ora dare una idea della *ripruova* che suol farsi talvolta sì dell'addizione, come della sottrazione. Avendo fatta l'addizione di più numeri, dalla loro somma totale si tolgano successivamente l'una dopo l'altra le somme parziali, quella cioè di tutte le semplici unità, l'altra di tutte le decine, quella di tutte le centinaia, ec... Chiaro apparisce che, ove quella operazione sia ben eseguita, nulla dovrà restare dopo le indicate sottrazioni, le quali per più di agevolezza sarà bene incominciare dalla sinistra. Così per istituire la ripruova sull'addizione eseguita sopra (12), dalle 12 decine di migliaia della somma totale si toglierà primieramente la somma 12 delle decine di migliaia contenute nella prima colonna a sinistra; niente rima-

nendo per residuo, si sottrarrà dalle 8 migliaia della somma totale la somma 8 delle migliaia contenute nella seconda colonna; qui ancora niente rimanendo si passerà tosto a sottrarre dalle 9 centinaia della somma totale le 7 contenute nella terza colonna, il residuo sarà 2; mettendo quindi al fianco del medesimo le 7 decine della somma totale, se ne avranno 27, dalle quali togliendo la somma 26 di quelle contenute nella quarta colonna, si otterrà per residuo 1; ponendo da ultimo al fianco di questo residuo le unità della somma totale, si otterrà 18, da cui sottratta la somma delle unità contenute nella quinta colonna, per ultimo residuo rimarrà zero. Donde conchiudesi che quell' addizione era ben eseguita.

32478
397
96061
42
Somma totale 128978

Somma parziale:

delle decine di migliaia 12
8
delle migliaia. 8
9
delle centinaia. 7
27
delle decine. 26
18
delle unità 18
00

Per la ripruova della sottrazione basterà aggiugnere il residuo al sottraendo, ove la somma di questi due numeri risulti uguale al minuendo, si avrà un indizio certo che la sottrazione è ben eseguita. Per darne un esempio, si aggiunga il residuo 264792 della sottrazione eseguita sopra (14) al sottraendo 3104, la somma sarà 267896 uguale al minuendo

267896
3104
Residuo. . . . 264792
Sottraendo . . . 3104
Somma o Minuendo. 267896

Dal detto nel presente numero è evidente che la ripruova dell' addizione si esegue per mezzo della sottrazione, e quella della sottrazione per via dell' addizione.

19. Moltiplicare un numero qualunque per un altro, vale lo stesso che assoggettare il primo numero a quella operazione medesima, cui assoggettasi la unità perchè si ottenga il secondo. Questa definizione della moltiplicazione essendo generale, vale di qualunque sorta sieno i numeri che si moltiplicano fra loro o interi o fratti, come a suo luogo si farà chiaro. Per dichiararla riguardo ai numeri interi, dei quali al presente trattiamo: moltiplicare un numero intero per un altro intero, vale lo stesso che aggiugnere tante volte il primo numero a se medesimo, quante volte la unità devesi aggiugnere a se stessa perchè si abbia il secondo. Così il numero 16 si moltiplicherebbe per 4 con la seguente addizione

$$\begin{array}{r} 16 \\ 16 \\ 16 \\ 16 \\ \hline 64 \end{array}$$

con aggiugnere cioè tre volte 16 a se medesimo, altrettante essendo le volte che a se stessa la unità aggiugner si deve onde ottenere 4. Adunque ogni volta che i numeri da sommarsi sono fra loro uguali, l' addizione prende il nome di moltiplicazione, giacchè la somma trovasi allora composta di uno di questi numeri tante volte ripetuto quanti sono quei che insieme si vogliono aggiugnere. Il numero che si ripete chiamasi *moltiplicando*, quello che indica le volte che si ripete dicesi *moltiplicatore*, finalmente appellasi *prodotto* il risultato della operazione rispetto al quale il moltiplicando ed il moltiplicatore, con comune vocabolo si nominano *fattori* (*). Or di due numeri interi di una sola cifra, la moltiplicazione è agevole ad eseguirsi scrivendo uno dei due nella medesima colonna verticale tante volte quante unità si contengono nell' altro per quindi farne la somma, che sarà il prodotto cercato, come dal detto può facilmente argomentarsi. Ma perchè siffatti prodotti si rendano familiari ai principianti, basterà tenere sott' occhio la segnente tavola, la quale dicesi Pitagorica dall' essere comunemente attribuita a Pitagora.

(*) Nella moltiplicazione dei numeri concreti il prodotto è sempre della stessa specie del moltiplicando, ed il moltiplicatore la fa da numero astratto. Ad esempio volendo conoscere il costo di 7 tomoli di grano al prezzo di ducati 3 per ciascun tomolo, si moltiplicherà 3 per 7, ed il prodotto 21 esprimerà ducati come il moltiplicando 3, perchè quantunque il moltiplicatore 7 è pur esso un numero concreto, nondimeno qui serve ad indicare soltanto che il numero 3 deve essere ripetuto 7 volte. Quindi la moltiplicazione di due numeri concreti della medesima specie non mai potrebbe eseguirsi, perchè il prodotto non avrebbe alcun significato. Vorrà pertanto eccettuarsi il caso in cui si dovrebbe misurare un campo, una strada, una tavola, o un obbietto qualunque esteso, perchè simili misure si effettuano col moltiplicare fra loro i due numeri concreti della stessa specie indicanti la lunghezza e la larghezza del campo, della strada, della tavola, ec. come si spiegherà in Geometria.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

20. La formazione di questa tavola vien descritta dal Lacroix nella sua Aritmetica ad un dipresso come segue. Si scrivono primieramente sopra una medesima linea orizzontale i numeri 1, 2, 3, . . . 9. Si aggiugne quindi ciascuno di questi numeri a se stesso, scrivendo le somme al di sotto dei medesimi in un'altra linea situata allo stesso modo che la prima; questa seconda linea si troverà allora composta del doppio di ciascun numero della prima, ossia del prodotto di questo numero per 2. Inoltre ciascun dei numeri della seconda linea si sommi col corrispondente nella prima, e le somme si adattino nella medesima guisa sopra di una terza linea, la quale conterrà perciò il triplo di ciascuno dei numeri della prima, ovvero i loro prodotti per 3. Mediante l'addizione dei numeri della prima linea con quelli della terza si formerà la quarta, che conterrà il quadruplo di ciascun dei numeri della prima, vale a dire i prodotti di questi per 4; e così di seguito, fino a tanto che non si pervenga alla nona linea, la quale contiene i prodotti dei numeri della prima per 9.

21. Ben intesa la formazione della tavola sarà facile comprenderne l'uso. Che però ove si debba moltiplicare 8 per 7, si cerchi primieramente nella superiore linea orizzontale una delle due cifre proposte, ad esempio 8, quindi si passi a cercare dell'altra 7 nella prima linea verticale: allora dalla cifra 8 discendendo verticalmente finchè si giunga alla linea orizzontale dove ritrovasi l'altra cifra 7, si rinverrà il numero 56, il quale sarà il prodotto che si addimandava.

L'istesso prodotto 56 si sarebbe trovato nella tavola pitagorica qualora si fosse cercato nella superiore linea orizzontale la cifra 7, e nella prima verticale la cifra 8; infatti dalla cifra 7 discendendo verticalmente fino alla linea orizzontale nel cui principio sta situata la cifra 8, s'incontra il numero 56. Da questa semplice riflessione conseguita che il prodotto di un numero per un altro rimane lo stesso prendendo per moltiplicando il moltiplicatore, e per moltiplicatore il moltiplicando. Per darne una dichiarazione più generale, sia da moltiplicarsi 3 per 5: disponiamo in una linea orizzontale le unità contenute nel numero 5, e

segniamo al di sotto altre due somiglianti linee, si troveranno così disposte nel quadro che segue tutte le unità contenute nel 15 che è il prodotto di 3 per 5.

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

Ora è chiaro che contando le linee orizzontali, il quadro risulta dal 5 ripetuto tre volte, e contando le linee verticali il quadro medesimo risulta dal 3 ripetuto cinque volte.

22. Diciamo ora della moltiplicazione di un numero intero composto di più di una cifra per un altro di una sola cifra. Posto il moltiplicatore sotto le unità del moltiplicando, ad esempio 7 sotto le unità di 526, ove questo per quello moltiplicar si volesse, e tirata una linea forminsi successivamente i prodotti delle unità di ciascun ordine del moltiplicando per il moltiplicatore disponendoli come segue.

$$\begin{array}{r} 526 \\ 7 \\ \hline 3682 \end{array}$$

Il prodotto di 7 per le 6 unità del moltiplicando è 42; si segnerà dunque sotto la linea al luogo delle unità il solo 2 ritenendo le quattro decine per aggiugnerle alle altre che in seguito si troveranno. In secondo luogo il prodotto di 7 per le due decine del moltiplicando è 14, al quale unendo le 4 decine precedentemente ritenute, se ne otterranno 18; notando quindi le 8 unità di decine al proprio luogo, ritengasi il centinaio onde unirlo alle altre 35, che si hanno moltiplicando 7 per le 5 centinaia del moltiplicando; il prodotto dunque di 526 per 7 sarà 3682. Notisi qui che se il moltiplicando termini con uno o più zeri basterà incominciare la operazione dalla prima cifra significativa, ponendo infine accanto al prodotto a destra tanti zeri quanti ve ne ha nel moltiplicando. Da ultimo per riguardo a qualche zero posto tra le cifre significative del moltiplicando, non avendosi per esso verun prodotto, dovremo segnare zero qualora niente siasi ritenuto del precedente prodotto. Il detto finora si esporrà chiaramente con la proposizione che segue. *Per moltiplicare un numero intero composto di più cifre per un altro di una sola cifra, si porrà il moltiplicatore sotto le unità del moltiplicando, e condotta una linea al di sotto dei medesimi, onde separarli dal loro prodotto, cominceranno dalla destra a moltiplicarsi successivamente le unità di ciascun ordine del moltiplicando per il moltiplicatore; ciascun prodotto si scriverà tutto intero ove non sorpassi nove, e contenendo delle decine, queste si riterranno per unirle al prodotto seguente; giunti poi alla ultima cifra del moltiplicando, si noterà sempre tutto intero il prodotto della medesima per il moltiplicatore aggiugnendovi il di più che si sarà ritenuto del prodotto precedente.* Gli esempii che seguono ci serviranno di schiarimento maggiore.

$$\begin{array}{r} 956 \\ 6 \\ \hline 5736 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8200 \\ 9 \\ \hline 73800 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7012 \\ 5 \\ \hline 35060 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 80970 \\ 4 \\ \hline 323880 \end{array}$$

23. Si voglia adesso supporre che il moltiplicatore ancora sia un numero composto di più cifre. E per cominciare dal caso più semplice, sia 10 questo numero; s' intenderà facilmente che per moltiplicare un qualunque numero pel dato numero 10, basterà aggiugnere nel primo, che è il moltiplicando, un zero dalla parte destra. Infatti dovendo questo moltiplicando nel moltiplicarsi per 10 acquistare un valore dieci volte maggiore, dovranno per conseguenza in esso le unità cangiarsi in decine, le decine in centinaia, le centinaia in migliaia, ec. Or questo si ottiene aggiugnendovi a destra un zero (3). Dunque ec. Per la ragione medesima si moltiplicherà un numero qualunque per 100 aggiugnendovi a destra due zeri; giacchè col mettervi un zero solo diventerebbe dieci volte maggiore, e con l'aggiugnervi il secondo diventerebbe maggiore altre dieci volte, sarebbe cioè dieci volte dieci, ossia cento volte maggiore, moltiplicato quindi si troverebbe per 100. Continuando siffatti ragionamenti verremo in chiaro della seguente proposizione. *Secondo il nostro sistema di numerazione la moltiplicazione di un numero per 10, 100, 1000, ec. si effettua scrivendo a destra nel moltiplicando tanti zeri quanti ne contiene il moltiplicatore.*

24. Dal detto si rende ancora agevole la moltiplicazione allorchè nel moltiplicatore la cifra significativa seguitata da uno o più zeri sia diversa dalla unità. Ad esempio se si voglia moltiplicare il numero 764 per 20, o per 200, o per 2000, ec. i numeri 20, 200, 2000, ec. esprimendo 2 volte 10, 2 volte 100, 2 volte 1000, ec. si moltiplicherà il proposto numero 764 prima per 2 (22), e quindi nel prodotto 1528 si porranno a destra uno, due, tre, ec. zeri, quanti ne contiene l' altro fattore (23). L' istesso si praticherà in generale per una qualunque altra cifra significativa diversa da 2, come vien espresso dalla sottocennata proposizione. *Dato un moltiplicatore che abbia una cifra significativa qualunque avente a fianco un qualsivoglia numero di zeri, si moltiplicherà in primo luogo il moltiplicando per la cifra significativa, e nel risultante prodotto a destra si porranno altrettanti zeri quanti ve ne ha nel moltiplicatore.*

25. Possiamo dal detto finora (22. 23. 24) rilevare il metodo da seguirsi nel fare la moltiplicazione, qualunque sia il moltiplicando ed il moltiplicatore. Sia infatti 564 il moltiplicando, e 249 il moltiplicatore, scrivendo l' uno sotto dell' altro nel modo che quì si vede

```
   564
   249
  ----
  5076
 2256
1128
------
140436
```

e conducendo la solita linea, si moltiplicherà primieramente tutto il 564 per 9, segnando immediatamente sotto la linea il prodotto 5076; si passerà quindi a moltiplicare il medesimo 564 per 4 notando l'altro prodotto 2256 sotto il primo, in modo però che la prima cifra 6 cada al luogo delle decine; finalmente il moltiplicando 264 dovrà moltiplicarsi per la rimanente cifra 2 del moltiplicatore scrivendo il prodotto 1128 sotto i primi due, avvertendo di far cadere la prima cifra 8 al luogo delle centinaia. Posto ciò si tirerà una seconda linea sotto

i tre prodotti onde ottenerne la somma, la quale essendo 140436, tale sarà pure il cercato prodotto di 564 per 249. La ragione del così operare si renderà chiara pel seguente raziocinio. Moltiplicare 564 per 249 vale lo stesso che ripetere 9 volte, più 40 volte, più 200 volte il numero 564; sicchè la indicata moltiplicazione si divide in altre tre, nelle quali il comune moltiplicando è 564 ed i moltiplicatori sono 9, 40, 200; adunque i tre prodotti risultanti da siffatte moltiplicazioni presi insieme debbono formare il prodotto di 564 per 249. Ma 564 moltiplicato per 9 dà 5076, moltiplicato poi per 40 dà 22560, moltiplicato infine per 200 dà 112800; adunque sommando insieme i tre numeri 5076, 22560, 112800, come qui scorgesi

$$\begin{array}{r} 5076 \\ 22560 \\ 112800 \\ \hline 140436 \end{array}$$

la somma 140436 sarà il prodotto di 564 per 249. Ma il medesimo risultato si sarebbe ottenuto, qualora nello scrivere i prodotti parziali, onde insieme sommarli, tralasciati si fossero gli zeri, situando per altro le rimanenti cifre al proprio luogo, lo che torna allo stesso che sopra per noi è stato operato; quindi ec. Pel fatto ragionamento applicabile a qualsivoglia moltiplicazione, nella quale il moltiplicando ed il moltiplicatore sono numeri composti di più cifre, potrà in generale stabilirsi la proposizione. *Dati due numeri di più cifre da moltiplicarsi uno per l' altro, pongasi primieramente il moltiplicatore sotto il moltiplicando per modo che le cifre dello stesso ordine si corrispondano; quindi condotta una linea sotto i medesimi, forminsi i prodotti di tutte insieme le cifre del moltiplicando per ciascuna cifra del moltiplicatore, avvertendo di cominciare sempre nell' uno e nell' altro dalle cifre che sono a destra; siffatti prodotti posti sotto la linea in serie discendente, ed in guisa che la prima cifra di ognuno di essi cada al luogo delle unità di quell' ordine al quale spetta la cifra del moltiplicatore per la quale operata si è la moltiplicazione, ove insieme si sommino, somministrano il prodotto dei due proposti numeri.* Eccone gli esempii.

$$\begin{array}{r} 824 \\ 59 \\ \hline 7416 \\ 4120 \\ \hline 48616 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3045 \\ 267 \\ \hline 21315 \\ 18270 \\ 6090 \\ \hline 813015 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9648 \\ 5137 \\ \hline 67536 \\ 28944 \\ 9648 \\ 48240 \\ \hline 49561776 \end{array}$$

26. Daremo termine alla teoria della moltiplicazione dei numeri interi con le seguenti riflessioni. La prima, che immediatamente conseguita dal detto sopra (22. 24), è che ove i due fattori sieno terminati da zeri, si moltiplicheranno tra loro le sole cifre significative, ed al prodotto si aggiugneranno a destra gli zeri

tralasciati nell' uno e nell' altro. Sia da moltiplicarsi 37800 per 2410, si moltiplicherà prima 378 per 241 come segue

```
  378
  241
  ---
  378
 1512
 756
 -----
 91098
```

ed al prodotto 91098 si aggiungeranno a destra tre zeri perchè si abbia il vero prodotto 91098000. L' altra è che occorrendo tra le cifre significative del moltiplicatore uno o più zeri, potranno essi trascurarsi perchè non danno alcun prodotto; converrà per altro avvertire di scrivere al proprio luogo la cifra delle unità del prodotto risultante dalla cifra significativa che viene dopo questi zeri. Gli esempii seguenti ne agevoleranno l' intendimento.

```
    9486            466
    2103           1002
    ----            ---
   28458            932
  9486           466
 18972            ------
 --------        466932
 19949058
```

27. Dividere un numero qualunque per un altro, vale lo stesso che cercare un terzo numero per cui moltiplicando il secondo si ottenga il primo; donde si fa chiaro che dato essendo un qualsivoglia prodotto con uno dei due suoi fattori, la divisione ci condurrà a conoscerne il secondo. Il prodotto dato, il numero cioè che deve dividersi, si chiama *dividendo*, il fattore dato, il numero cioè per cui deve farsi la divisione, appellasi *divisore*, ed il fattore cercato, il numero cioè pel quale moltiplicato il divisore si acquista il dividendo, si nomina *quoziente*, ovvero *quoto*.

Per esemplificare siffatte cose nei numeri interi, dei quali solamente ci occuperemo per ora, sia dato il prodotto 64 con uno dei suoi fattori, per esempio 4, la divisione c' insegnerà a trovare il secondo fattore 16, ed in questo caso 64 sarà il dividendo, 4 il divisore, 16 il quoziente. Or un prodotto di due fattori risulta per uno di essi tante volte ripetuto quante sono le unità contenute nell' altro (19); quindi ancora il 64 formerassi pel 4 ripetuto 16 volte; la divisione adunque che ha per oggetto il trovare quest' ultimo numero, servirà pure a farci conoscere che 16 volte il divisore 4 è contenuto nel numero dividendo 64 (*).

(*) Possiamo ora fare alcune riflessioni intorno alla divisione dei numeri concreti uniformi alle già fatte nella nota del numero 19. Nella divisione dei numeri concreti possono considerarsi due casi. Il primo che il quoziente esprima unità della medesima specie che quelle del dividendo, e con ciò il divisore, il quale necessariamente sarà composto di unità di di-

28. In generale adunqne la divisione serve a farci venire in cognizione delle quante volte il divisore è contenuto nel dividendo.; or per tale ricerca sarebbe sufficiente la sottrazione. Infatti se si vuol sapere quante volte il 64 contiene il 4, altro non deve farsi che sottrarre 4 da 64 quanto volte fia possibile, e perchè dopo 16 sottrazioni di 4 da 64 nulla rimane per residuo, si conclude che 16 volte il 4 è contenuto in 64. Questo metodo per altro di ripetere la sottrazione per ottenere il quoto non è praticabile allorchè il dividendo contiene un gran numero di volte il divisore, e fa d' uopo servirsi di un compendio analogo a quello della moltiplicazione. Di questo compendio pertanto parleremo nei seguenti paragrafi; intanto per quel che è detto sopra (19), e per ciò che precede, ognuno potrà rilevare quanto sia vero ciò che dai matematici comunemente si asserisce, che cioè la divisione è opposta alla moltiplicazione, nella medesima guisa che la sottrazione si oppone all' addizione.

29. Se come il dividendo, così pnre il divisore fossero numeri di una cifra sola, la divisione si eseguirebbe senza la menoma difficoltà con pochissime sottrazioni fatte a mente del divisore dal dividendo; così 8 diviso per 4 dà per quoto 2. Ove poi il dividendo non potesse esattamente dividersi pel divisore, vi sarà un ultimo residuo minore del medesimo divisore, e per quoziente si avrà un numero intero con una frazione avente per numeratore il residuo ultimo, e per denominatore il divisore: così 9 diviso per 2 darebbe per quoto 4 con la frazione $\frac{1}{2}$, giacchè 4 volte il 2 è contenuto in 9 e resta 1, il quale residuo essendo la metà del divisore dovrà esprimersi nel quoziente per $\frac{1}{2}$ (6); così ancora dividendo 8 per 3 si avrebbe per quoziente 2 con la frazione $\frac{2}{3}$, perchè 3 in 8 si contiene 2 volte e resta 2, questo resto esprimendo due terze parti del divisore si scriverà nel quoto $\frac{2}{3}$. Queste frazioni sogliono scriversi a destra vicino alla parte intera del quoziente in questo modo $4\frac{1}{2}$, $2\frac{2}{3}$.

30. Se mai il divisore è di una sola cifra, e il dividendo di due cifre, ma minore del divisore preso dieci volte, minore cioè del divisore seguito da uno zero (23), bisognerebbe eziandio ricorrere al metodo della ripetuta sottrazione. Ma o in questo, e nel caso del numero precedente la divisione potrà facilmente effettuarsi con la tavola Pitagorica, nella quale si cercherà quel numero che moltiplicato pel divisore dia il dividendo. Ad esempio debba dividersi per 6 il numero 54, essendo 54 minore di 6 moltiplicato per 10, cioè di 60, si farà uso della succennata tavola Pitagorica cercando nella superiore linea orizzontale della medesima il divisore 6, da cui discendendo verticalmente s' incontrerà il dividendo

---

versa specie, la farà da numero astratto. Il secondo che il divisore sia della medesima specie del dividendo, ed allora il quoziente sarà sempre un numero astratto. Ad esempio se con 21 ducati si sono comprati 7 tomoli di grano, per conoscere il costo di ciascun tomolo bisognerà dividere 21 per 7, con che il quoziente 3 esprimerà ducati come il dividendo: il divisore pertanto prenderà figura di numero astratto, perchè la operazione riducesi a conoscere qual è quel numero di ducati che ripetuto 7 volte, quanti cioè sono i tomoli di grano, dà la somma dei 21 ducati. Ma ove con 21 ducati si volesse comprare del grano a ducati 3 il tomolo, per conoscere il numero dei tomoli che si possono acquistare farà d' uopo dividere 21 ducati per 3, cioè il divisore sarà un numero concreto della specie medesima del dividendo, che però il quoto 7 sarà un numero astratto, esprimerà cioè il numero delle volte che 3 si contiene in 21.

54 posto nella ultima linea orizzontale, la cifra 9 posta al principio di questa linea sarà il cercato quoziente. Non essendo però tutti i numeri esattamente divisibili per altri, spesse fiate avviene che il dividendo non si trova nella tavola; così se per 7 volesse dividersi il numero 46, discendendo dal divisore 7 posto al principio della settima colonna verticale non mai s'incontrerebbe il dividendo 46, il che vuol dire che questo numero non può esattamente partirsi per 7; per altro in questo caso fermandosi al 42 che è il numero minore che più si appressa al 46, e rivolgendosi al principio della linea orizzontale in cui si giace, si troverà quivi la cifra 6; che però si dirà che 7 in 46 è contenuto 6 volte, e vi restano 4 unità, essendo 4 la differenza tra il 46 ed il 42; quindi il quoziente di 46 diviso per 7 sarà $6\frac{4}{7}$ (29).

31. Sia ora il dividendo un numero qualunque di più cifre, e il divisore suppongasi ancor per poco di una cifra sola. Vogliasi ad esempio il numero 741 dividere per 3, la operazione si dovrà eseguire nella seguente guisa

```
3 | 741 | 247
     6
    ---
     14
     12
    ---
      21
      21
    ---
      00
```

Posto accanto al numero dividendo 741 a sinistra il divisore 3, frapponendovi una linea, s'imprenda la divisione del dividendo medesimo dalle cifre che sono a sinistra; e poichè 3 è contenuto nella prima 7 2 volte, scrivasi 2 a destra dopo il dividendo con interporvi una seconda linea, il prodotto di 2 pel divisore 3, che è 6, si sottragga da 7, rimarrà 1 per residuo, al quale si appressi la cifra 4, che nel dividendo vien dopo immediatamente la cifra 7 già divisa; e poichè 3 entra in 14 4 volte, si noti 4 accanto al 2 verso la destra, il prodotto di 4 per 3 uguale a 12 si sottragga da 14, il residuo sarà 2, al quale si appressi la ultima cifra 1 del dividendo; e perchè 3 in 21 si contiene 7 volte, si segui 7 dopo il 4, ed il prodotto di 7 per 3, che è 21, si sottragga da 21: niente rimarrà. Adunque il cercato quoziente sarà 247. La ragione della descritta operazione è evidente; infatti delle 7 centinaia del dividendo si possono fare 3 parti, ciascuna di 2 centinaia, restando per residuo 1 centinaio, questo equivale a 10 decine, le quali aggiunte alle altre 4 espresse dalla seconda cifra del dividendo somministrano altre 3 parti, ciascuna di 4 decine, con un residuo di 2 decine, che equivalgono a 20 unità, queste 20 unità con l'altra segnata dalla ultima cifra del dividendo, divise per 3, daranno esattamente 3 altre parti, ciascuna di 7 unità. Adunque il numero che 3 volte ripetuto dà 741, e che per conseguenza in questo 3 volte è contenuto, cioè (27. 28) il quoziente di 741 diviso per 3, sarà composto di 2 centinaia, 4 decine, e 7 unità, sarà perciò 247.

32. Proposto il numero 3624 da dividersi per 8, chiaro apparisce che il quoto non conterrà migliaia; giacchè nel dividendo non ve ne ha che 3 sole, e

pure, ove il quoto contenesse un sol migliaio, dovrebbe il dividendo contenerne 8. Intanto si ridurranno le migliaia a centinaia; che però disponendo il divisore ed il dividendo nella foggia già sopra (31) indicata, si comincerà dal dividere 36 per 8; e perchè 8 in 36 vien contenuto 4 volte, si scriverà 4 al luogo del quoziente, procedendo tutto il rimanente della operazione come nel numero precedente; per il che si troverà in fine 453 per quoto. Gioverà non pertanto segnarne qui sotto per disteso l'andamento.

```
8 | 3624 | 453
    32
    --
     42
     40
     --
      24
      24
      --
      00
```

33. Nella medesima ipotesi che il divisore sia di una sola cifra, in non pochi casi particolari avverrà che sottratto il prodotto della cifra del quoto nel divisore, abbiasi un residuo nullo, e che la seguente cifra del dividendo sia minore del divisore, e tale per conseguenza da non potersi dividere pel medesimo. In siffatti casi siamo avvertiti non dovere il quoziente contenere unità di quell'ordine a cui quella cifra appartiene; si scriverà dunque nel quoto un zero, e alla detta cifra si unirà l'altra seguente, onde andare innanzi nella divisione. Sia per esempio da dividersi 1525 per 5, la operazione procederà come segue.

```
5 | 1525 | 305
    15
    --
      25
      25
      --
      00
```

Contenendosi il 5 nelle due prime cifre del dividendo, cioè in 15, 3 volte, si scriverà 3 nel quoziente, ed il prodotto di 3 per 5, che è 15, si toglierà da 15, il residuo sarà nullo. Si abbassi quindi la seguente cifra 2 del dividendo, la quale certamente non potendo dividersi per 5, ne avvisa che il quoziente non deve avere decine; segnando dunque zero nel luogo delle decine del quoziente si appresserà alla cifra 2 l'altra seguente 5, e poichè 25 è capace di contenere esattamente il divisore 5 per ben 5 volte, si noterà 5 per le unità del quoto, che conseguentemente sarà uguale a 305. Eccone due altri esempii.

7 | 294567 | 42081
28
14
14
56
56
7
7
0

9 | 333063 | 37007
27
63
63
063
63
00

34. È omai tempo di esporre la regola, della quale dobbiamo far uso allorchè il divisore eziandio è un numero composto di più cifre. Tolgasi ad esempio il numero 423405 da dividersi per l'altro 485. Ella è cosa chiara che un tal quoziente non dovrà contenere migliaia (32). Posto ciò la operazione si eseguirà nel modo sottocennato.

485 | 423405 | 873
3880
3540
3395
1455
1455
0000

In generale si prenderanno sempre, cominciando dalla sinistra, tante cifre del dividendo quante sono sufficienti a formare un numero uguale, ovvero prossimamente maggiore del divisore; queste saranno nel nostro caso le prime quattro che compongono il numero 4234 prossimamente maggiore di 485. Ciò fatto si dividerà primieramente il numero 4234 pel dato divisore 485; onde poi scorgere quante volte 4234 è capace di contenere il 485, si vedrà quante volte tutte le cifre di quest'ultimo si contengono nelle cifre del primo. Per verità la prima cifra 4 del 485 nelle due prime 42 del 4234 si contiene 10 volte, non è pertanto a concludere che tutto il divisore 485 si contenga in 4234 ancora 10 volte; infatti nel quoto allora si numererebbero 10 centinaia che formano un migliaio, ciocchè pel detto non deve aver luogo. Vediamo per altro se il divisore 485 può contenersi 9 volte in 4234, al che si procederà nella foggia seguente: la prima cifra 4 di 485 in 42, cioè nelle due prime cifre di 4234, si contiene 9 volte con un residuo 6, ma ponendo a fianco di questo residuo la terza cifra 3 di 4234, si ottiene 63, in cui la seconda cifra 8 del divisore non si contiene 9 volte, donde conseguita che neppure 9 volte potrà egli contenersi in 4234. Vedremo ora che 8 volte il 3234 è capace del divisore 485; poichè 4 in 52 si contiene 8 volte con un resto 10, che seguito dalla cifra 3 darà 103, nel quale la cifra 8 certamente si contiene 8 volte con un

resto uguale a 39 che seguito dalla ultima cifra 4 del numero 4234 conterrà senza alcun dubbio 8 volte la ultima cifra 5 del divisore: ma quantunque volte le unità, decine, centinaia, ec. di un dato divisore sono contenute nelle unità, decine, centinaia, ec. di un dato dividendo un ugual numero di volte, tutto il divisore si conterrà nel dividendo per quello stesso numero di volte. Adunque 8 volte il divisore 485 si conterrà certamente nel numero 4234. Notando 8 nel luogo del quoziente, e sottraendo da 4234 il prodotto di 8 pel divisore 485 uguale a 3880, si avrà per residuo 354. A questo residuo farà mestieri appressare la quinta cifra o del dividendo, e da capo si dovrà vedere quante volte il 3540 sia capace del divisore 485; che però si dirà: 4 in 35 quante volte è contenuto? 8 volte il 4 può contenersi in 35 con un resto uguale a 3, che seguito dall'altra cifra 4 di 3540 farà 34 in cui non entra 8 volte la seconda cifra 8 del divisore; quindi non è possibile che tutto il divisore possa in 3550 contenersi 8 volte, si conterrà pertanto 7 volte. Infatti 4 in 35 entra 7 volte e si ha il residuo 7, 8 in 74 si contiene altresì 7 volte con un resto 18, per cui il 5 ancora entrerà 7 volte in questo resto unito alla cifra o di 3540. Scrivendo adunque 7 per le decine del quoziente, si faccia la moltiplicazione di 7 per 485, il prodotto sarà 3395, il quale sottratto da 3540 darà per residuo 145. Allato a questo secondo residuo si appresserà la ultima cifra 5 del dividendo cercando il numero delle volte che 485 si potrà contenere in 1455 dicendo: quante volte il 4 in 14? 3 volte il 4 si contiene in 14 col resto 2, 8 in 25 anche 3 volte si contiene col residuo 1, 5 in 15 entra esattamente 3 volte; dunque tutto il divisore 485 nel 1455 esattamente si conterrà 3 volte, si scriverà quindi nel quoto 3 che moltiplicato per 485 restituirà 1455, e però l'ultimo residuo sarà zero. Adunque il quoziente di 423405 diviso per 485 sarà 873.

La viva voce del Professore farà meglio comprendere ai giovani questa specie di operazione, la quale si praticherà ogni volta che il divisore sia un numero composto di più cifre, senza che sia necessario di discendere a più minute particolarità. Intanto sarà ben fatto l' esercitarsi cogli esempii seguenti.

```
372 | 26412 | 71        251 | 57981 | 231
      2604                    502
      ----                    ---
       372                    778
       372                    753
       ---                    ---
       000                     251
                               251
                               ---
                               000
```

35. Non sarà qui del tutto fuor di luogo l'avvertire 1.° che farà d'uopo, ove si abbia dopo compiuta la divisione un qualche residuo dalla ultima sottrazione l' aggiugnere alle cifre ottenute la frazione che abbia per numeratore quell' ultimo residuo, e per denominatore il divisore (29). Eccone un esempio

$$423 \mid 89963 \mid 212\,\tfrac{287}{423}$$

```
  846
  ———
  536
  423
  ———
 1133
  846
  ———
  287
```

2.° Che avverrà non rare volte, che sottratto il prodotto del divisore nella cifra del quoziente, il residuo sia tale che ancora unito alla seguente cifra del dividendo resti tuttavolta minore del divisore: nella quale supposizione si dovrà scrivere zero nel quoto (33), ed appressare al residuo la cifra seguente del dividendo onde continuare la operazione. Con siffatta avvertenza nel dividere 167364 per 548 avremo per quoziente $305\,\frac{224}{548}$.

36. Il fin quì ampiamente esposto si riduce in breve, alle seguenti operazioni. *Per dividere un numero per un altro, si porrà primieramente il divisore vicino al dividendo a sinistra, intramezzandovi una linea. Si prenderanno poscia cominciando dalla sinistra tante cifre del medesimo dividendo quante son necessarie perchè si ottenga un numero che possa contenere il divisore, cercando al tempo stesso quante volte la prima cifra di questo contengasi nella prima o nelle due prime cifre di quella parte dividenda; se ciò che rimane alla prima cifra del divisore unito alla cifra seguente della parte dividenda è bastevole perchè tante volte almeno si contenga in esso la seconda cifra del divisore; come ancora se il suo resto congiunto all' altra seguente cifra della parte dividenda basta perchè la terza cifra del divisore in esso contengasi pel medesimo numero di volte; e così successivamente fino alle ultime cifre, saremo certi che tutto il divisore si conterrà nel dividendo per lo stesso numero di volte, e quindi un tal numero sarà la prima cifra del quoziente che si segnerà a destra dopo il dividendo con interporvi una linea. Questa prima cifra si moltiplicherà poscia pel divisore, il prodotto si sottrarrà dalla parte che si era tolta a dividere, al residuo si appresserà la cifra seguente del dividendo, cercando nella medesima guisa quante volte il divisore è contenuto in questa seconda parte del dividendo. Scrivendo per la seconda cifra del quoziente il numero che si trova, questo si moltiplicherà pel divisore onde togliere il prodotto dalla seconda parte del dividendo. In tal foggia si continuerà la operazione finchè non siansi abbassate tutte le cifre del numero proposto a dividersi, avvertendo nella fine della operazione non meno che nel decorso a quanto è detto sopra* (35).

37. La moltiplicazione e la divisione si servono scambievolmente di ripruova al modo medesimo che la ripruova della somma si opera per la sottrazione, e la ripruova della sottrazione si fa per la somma. Per verità, ove siasi bene operato nel moltiplicare un numero per un altro, dividendo il prodotto per uno dei fattori dovrà ottenersi l' altro per quoziente; e viceversa quante volte un quoziente sia il risultato di una divisione eseguita secondo le regole già prescritte, il pro-

dotto della parte intera del medesimo quoziente pel divisore aggiunto al residuo ultimo, in caso che vi sia, sarà uguale al dividendo (27. 28). Adunque se in qualche moltiplicazione il prodotto diviso per uno dei due suoi fattori non dà per quoziente l'altro, se in qualche divisione alla parte intera del quoziente moltiplicata pel divisore aggiunto il residuo ultimo, nel caso che vi sia, non si ottiene il dividendo, dovremo da capo rifare le suddette operazioni onde scorgerne gli errori commessi.

CAPO III.

DEI NUMERI FRATTI ORDINARII.

38. Veniamo ora ai numeri fratti. Primieramente trattiamo dei fratti ordinarii, quindi passeremo nel seguente capo a far parola dei decimali. Dicemmo sopra (6) che il denominatore di una frazione segna il numero delle parti uguali in cui la unità vien divisa, ed il numeratore indica il numero che di tali parti si prende. Posto ciò senza la menoma difficoltà si dimostreranno le due seguenti proposizioni.

1.° Cresce il valore di una frazione allorchè o si aumenta il numeratore rimanendo lo stesso denominatore, ovvero si diminuisce il denominatore restando lo stesso numeratore.

2.° Decresce il valore di una frazione, diminuendosi il numeratore, e restando lo stesso denominatore, ovvero crescendo il denominatore senza punto cangiarsi il numeratore.

Ciascuna di queste proposizioni contiene due parti. A dimostrare di entrambe le prime la discorriamo così: il denominatore segnando in quante parti la unità è divisa determina la grandezza di queste parti, la quale si rimarrà la stessa quante volte non si cangerà il medesimo denominatore; quindi conseguita che se il solo numeratore di una frazione si aumenti o si diminuisca, verrà questa a contenere maggiore o minor numero di parti della grandezza medesima e conseguentemente si aumenterà o si diminuirà. Le seconde parti si dimostrano nel modo seguente: nel cangiarsi il denominatore si dovrà cangiare altresì la grandezza delle parti in cui la unità s'intende divisa; saranno cioè queste più grandi allorchè il denominatore è minore, perchè minore n'è il numero, e saranno più piccole quando il denominatore è maggiore, perchè maggiore n'è il numero; che però prendendosi lo stesso numero di parti, restando cioè il medesimo numeratore, ove il denominatore decresca, verrà a crescere la frazione perchè conterrà lo stesso numero di parti ma più grandi, se poi il denominatore crescerà, la frazione si diminuirà perchè lo stesso numero di parti ma più piccole vi si conterranno.

39. Dal detto conseguita 1.° che ritenendosi lo stesso denominatore di una frazione, se il numeratore si moltiplichi per 2, 3, ec. s'ingrandirà del doppio, del triplo, ec. la frazione, si troverà cioè moltiplicata per 2, 3, ec. e viceversa quante volte il numeratore si divida per 2, 3, ec. si avrà la metà della frazione, la sua terza parte, ec. rimarrà cioè divisa per 2, 3, ec. la frazione. Ad esempio $\frac{4}{17}$ è il doppio di $\frac{2}{17}$, e $\frac{9}{23}$ è il triplo di $\frac{3}{23}$; così pure $\frac{2}{5}$ è la metà di $\frac{4}{5}$, e $\frac{7}{29}$ è la terza parte di $\frac{21}{29}$.

2.° Che rimanendo lo stesso numeratore si moltiplicherà o si dividerà la frazione per 2, 3, ec. dividendo o moltiplicando per questi numeri il denominatore; così di $\frac{9}{22}$ il doppio è $\frac{9}{11}$, e di $\frac{4}{21}$ il triplo è $\frac{4}{7}$; ed al contrario di $\frac{11}{12}$ la metà è $\frac{11}{24}$, e di $\frac{13}{15}$ la terza parte è $\frac{13}{45}$. Potremo adunque stabilire la proposizione generale. *Una frazione si potrà moltiplicare per un numero intero in due modi, o moltiplicando il numeratore per l'intero, ovvero dividendo per questo intero il denominatore. Si potrà parimente dividere una frazione per un numero intero in due modi, o dividendo il numeratore per l'intero, o per questo moltiplicando il denominatore.*

40. *Non si cangerà il valore di una frazione quantunque volte si moltiplica per uno stesso numero il numeratore e il denominatore della medesima.* Questa proposizione deducesi dal numero precedente, giacchè per una parte moltiplicare il numeratore di una frazione per un numero dato vale lo stesso che moltiplicare per tal numero tutta la frazione; per l'altra allorchè si moltiplica il denominatore di una frazione per un numero dato si viene a dividere per questo numero la frazione. Laonde moltiplicare per un medesimo numero tanto il numeratore che il denominatore di una frazione varrà lo stesso che moltiplicarla e dividerla tutto insieme pel numero medesimo; sicchè essa non cangerà di valore, perchè ciò che si opererà col moltiplicare il numeratore pel dato numero verrà distrutto col moltiplicare pel medesimo il denominatore. Si comprende ora perchè $\frac{1}{6}$ sia ugnale a $\frac{3}{18}$, e $\frac{7}{15}$ a $\frac{28}{60}$. Si comprende altresì perchè i numeri fratti a preferenza degl' interi possano rappresentare la grandezza medesima con infinite espressioni tutte fra loro dissomiglianti: per esempio le frazioni

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{6},\ \frac{4}{8},\ \frac{5}{10},\ \frac{6}{12},\ \frac{7}{14},\ \ldots\ldots$$

sono tutte fra loro uguali perchè tutte esprimono una grandezza medesima, cioè la metà della unità, avvegnachè sotto forme diverse; così pure

$$\frac{1}{3},\ \frac{2}{6},\ \frac{3}{9},\ \frac{4}{12},\ \frac{5}{15},\ \frac{6}{18},\ \frac{7}{21},\ \ldots\ldots$$

sono frazioni che tutte rappresentano la terza parte della unità.

41. Fra tutte però le frazioni che rappresentano una medesima grandezza una ve ne ha che è la più semplice, ed è quella i cui *termini* (così si appellano il numeratore e il denominatore di una frazione) non sono divisibili per un medesimo divisore diverso dalla unità: così le frazioni $\frac{1}{2}$ ed $\frac{1}{3}$ tra tutte quante le altre che dinotano la metà e la terza parte della unità sono le più semplici. Spesse fiate pertanto data una frazione cade opportuno il vedere se la grandezza che per essa vien espressa possa rappresentarsi con altra frazione che della data non solo, ma di tutte ancora le altre che sono del valore medesimo sia la più semplice; tal sorta di ricerca equivale a quella con cui dimandasi il *massimo comun divi-*

sore di due numeri dati, della quale ricerca con più di agevolezza ed eleganza insieme tratteremo nell' algebra.

42. Sarà bene per altro il saper fin d'ora ridurre una frazione se non alla sua più semplice espressione, almeno ad un' altra che abbia i termini più semplici di quelli della già proposta. Siffatta riduzione potrà effettuarsi quante volte ambedue i termini della frazione sono divisibili per un medesimo numero, poichè in tal caso eseguendo la divisione, la frazione non si cangerà di valore (40) ed insieme i suoi termini diventeranno più semplici. Dal che rendesi chiaro ciocchè al principio del numero precedente accennai, che cioè una frazione è la più semplice fra le altre che rappresentano la grandezza medesima allorchè i suoi termini non hanno un comune divisore diverso dalla unità; tali ad esempio sono le frazioni $\frac{5}{7}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{15}{16}$, che però diconsi *irriducibili*. A rendersi poi agevole in non pochi casi la ricerca di un divisore comune dei due termini di una data frazione, gioverà por mente ai seguenti numeri, in cui per mezzo di altrettante proposizioni sporremo alcune regole le quali faran conoscere a primo aspetto se due numeri dati sono divisibili per i numeri semplici 2, 5, 3, e 9.

43. *Qualunque numero terminato a destra da una delle cifre 0, 2, 4, 6, 8, è divisibile esattamente per 2.* Imperocchè nell' eseguire la divisione ogni residuo che si ha dalla sottrazione del prodotto della cifra del quoziente pel divisore dalla parte dividenda, dovendo necessariamente essere minore del divisore, il penultimo residuo che si otterrà nel fare la divisione di un numero terminato a destra da una delle cifre 0, 2, 4, 6, 8, per 2, sarà o zero, ovvero 1; quindi appressando a questo residuo la ultima cifra del dividendo si avrà per la ultima sua parte dividenda uno dei succennati numeri 0, 2, 4, 6, 8 se il residuo è zero, in caso poi che questo residuo è 1, sarà quella ultima parte uguale ad uno dei seguenti altri 10, 12, 14, 16, 18; or 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 sono numeri tutti divisibili per 2 esattamente. Adunque ec.

Tutti i numeri divisibili esattamente per 2 chiamansi numeri *pari* perchè possono dividersi in due parti uguali; tutti gli altri diconsi *impari*.

44. *Tutti i numeri che terminano a destra o con zero o con 5, sono divisibili esattamente per 5.* Infatti il penultimo residuo della divisione deve essere in tal caso necessariamente uno dei numeri 0, 1, 2, 3, 4, sicchè la ultima parte del dividendo che rimarrà a dividersi per 5 sarà uno dei numeri 0, 10, 20, 30, 40, ovvero 5, 15, 25, 35, 45. Ma questi numeri sono tutti evidentemente divisibili per 5. Adunque ec.

45. *Un numero qualunque sarà divisibile per 3 o per 9, ove la somma delle cifre significative che lo compongono sia altresì esattamente divisibile per 3 o per 9.* Ad esempio il numero 7065543321 sarà divisibile esattamente per 3 e per 9, perchè la somma delle sue cifre significative è 36, che è un numero divisibile esattamente per 3 e per 9. Infatti quante volte si vuol dividere o per 3 o per 9 un numero espresso per la unità con degli zeri a fianco, si ha sempre per residuo 1. Perocchè il 10 ad esempio è composto da 9 e da 1, così pure il 100 da 99 e da 1, il 1000 da 999 e da 1, ec. ma i numeri 9, 99, 999, ec. sono esattamente divisibili per 3 e per 9. Adunque i numeri 10, 100, 1000, ec. ove si dividano per 3 o per 9 daranno sempre per residuo 1. Donde consegnita che dividendo per 3 o per 9 i numeri 20, 200, 2000, ec. si otterrà per residuo 2, e che gli altri 30, 300, 3000, ec. divisi per 3 o per 9 daranno per residuo 3, ed in generale che un numero qualunque formato da una cifra si-

gnificativa seguita da zeri diviso per 3 o per 9 darà per residuo la cifra significativa. Quindi

7000000000 diviso per 3 o per 9 darà per residuo . .	7
60000000	6
5000000	5
500000	5
40000	4
3000	3
300	3
20	2
1	1

e però la somma 7065543321 divisa per 3 o per 9 darà per residuo la somma 36

Il numero dunque 7065543321 diviso per 3 o per 9 darà per residuo la somma delle cifre significative che lo compongono. Questo ha luogo qualunque sia il numero che si divide per 3 o per 9 come dal ragionamento fatto manifestamente deducesi; che però se la somma delle cifre significative che compongono il numero è divisibile esattamente per 3 o per 9 (come realmente si verifica pel numero 7065543321), tale sarà pure il resto della divisione, e conseguentemente il numero medesimo.

Si avverta in questo luogo che non ogni numero divisibile per 3 è divisibile per 9, quantunque sia vero il contrario, che cioè ogni numero divisibile per 9 è altresì divisibile per 3. Ad esempio il numero 541320 è divisibile per 3 ma non per 9, perchè la somma delle cifre significative che lo compongono è 15 che è divisibile per 3 ma non per 9.

46. Tutti quei numeri che non possono dividersi per altri che sieno diversi da loro stessi e dalla unità, diconsi *numeri primi*; tali sono 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ec. Chiamansi poi *numeri primi fra loro* tutti quelli che non hanno un comun divisore diverso dalla unità, quantunque ciascuno di essi non sia numero primo; ad esempio 16 e 25 sono numeri primi fra loro, perchè sebbene il 16 sia divisibile per 2, per 4, per 8, e per 16, ed il 25 per 5, e per 25, purtuttavolta nessun dei divisori 2, 4, 8, 16, 5, 25 è comune al 16 ed al 25. Il numeratore adunque ed il denominatore di una frazione irriducibile (42) sono numeri primi fra loro.

47. Due frazioni che abbiano diversi denominatori, possono sempre, senza che si alteri il loro valore, ridursi ad avere lo stesso denominatore. Sieno le due frazioni $\frac{5}{7}$ e $\frac{2}{9}$; moltiplicando per 9 tanto il numeratore che il denominatore della prima si conseguirà $\frac{45}{63}$, moltiplicando poi per 7 il numeratore, ed il denominatore della seconda si avrà $\frac{14}{63}$, ed è chiaro che le due frazioni $\frac{45}{63}$ e $\frac{14}{63}$, le quali hanno il medesimo denominatore, sono del medesimo valore che le altre $\frac{5}{7}$ e $\frac{2}{9}$ (40). *Per ridurre dunque due frazioni al medesimo denominatore si moltiplicheranno i termini della prima pel denominatore della seconda, ed i termini della seconda pel denominatore della prima.*

Si abbiano ora le tre frazioni $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$: queste eziandio si ridurranno al medesimo denominatore senza farle cambiar di valore allorchè si moltiplicheranno i termini della prima, pel prodotto 15 dei denominatori della seconda e terza, i termini della seconda pel prodotto 10 dei denominatori della prima e terza, finalmente i termini della terza pel prodotto 6 dei denominatori della prima e seconda; infatti con queste operazioni, avranno le frazioni per comune denominatore il prodotto dei tre denominatori 2, 3, 5 nè cambieranno di valore per essere ambo i termini di ciascuna moltiplicati per uno stesso numero. Le frazioni ridotte saranno $\frac{15}{30}$, $\frac{20}{30}$, $\frac{24}{30}$.

In generale *si ridurranno più frazioni al medesimo denominatore moltiplicando i termini di ciascuna per il prodotto dei denominatori delle altre* (*).

48. Resta a dire delle principali operazioni su i fratti. E per cominciare dall' addizione, si abbiano le due frazioni $\frac{4}{7}$, e $\frac{2}{7}$; le parti che compongono siffatte frazioni appartenendo alla stessa divisione della unità, rappresentando cioè ambedue le frazioni la unione di più *settimi* della unità, chiaro apparisce che la somma delle medesime si otterrà aggiugnendo il nnmeratore della prima a quello della seconda, ed alla somma che quindi risulterà sottoscrivendo il denominatore

---

(*) Nel ridurre le frazioni al medesimo denominatore si avrà sempre occasione di osservare che il prodotto medesimo risolta dal moltiplicare fra loro tutti i denominatori delle frazioni medesime, quantunque le moltiplicazioni s' incomincino ora da un denominatore ed ora da un altro. Nè è a maravigliare, giacchè in generale il prodotto di più numeri è sempre lo stesso qualunque ordine si segua nelle moltiplicazioni; ciocchè dimostreremo partitamente nel modo seguente. Si ha sempre il prodotto medesimo qualunque sia l'ordine che si segue nel moltiplicare fra loro tre numeri dati, per esempio 4, 5, 6. Basterà per questo provare che il prodotto dei tre fattori 4, 5, 6, prescindendo dai loro particolari valori, si rimarrà lo stesso sia che si moltiplichi prima 4 per 5 e poi il prodotto di questi per 6, sia che prima 5 si moltiplichi per 4 ed il loro prodotto per 6, sia che finalmente 5 si moltiplichi per 6 e poi il prodotto loro per 4; poichè ove si dimostri che uguali fra loro sono i prodotti che si hanno trovandosi prima il fattore 4 nel primo posto, poi nel secondo, e quindi nel terzo, e questo indipendentemente dal particolare valore del medesimo, ne conseguiterà che uguali altresì saranno gli altri prodotti che si avranno facendo passare per tutti i tre posti ciascuno degli altri due fattori 5, 6. Ecco pertanto la dimostrazione dell' assunto da me preso a provare. Le moltiplicazioni successive dei tre numeri 4, 5, 6 si dinotino come segue: 4 per 5 per 6. Ciò fatto nel prodotto 4 per 5 si può mutare l' ordine dei fattori 4 e 5, come si avvertì nel numero 21; sarà donque il prodotto 4 per 5 per 6 uguale al prodotto 5 per 4 per 6. Si può eziandio cambiare l'ordine dei fattori 4 e 6 nel prodotto 5 per 4 per 6, poichè questo agguaglia 5 moltiplicato pel prodotto di 4 per 6; adunque sarà pure il prodotto 5 per 6 per 4 uguale ai precedenti. Sicchè i tre prodotti

4 per 5 per 6
5 per 4 per 6
5 per 6 per 4

sono uguali fra loro.

Con simile ragionamento dimostrandosi uguali fra loro i seguenti prodotti

4 per 5 per 6 per 7
5 per 4 per 6 per 7
5 per 6 per 4 per 7
5 per 6 per 7 per 4

si deduce che il prodotto di quattro fattori sarà lo stesso qualunque ordine si stabilisca nelle moltiplicazioni.

In generale adunque il prodotto di un qualunque numero di fattori si rimarrà lo stesso comunque si muti l' ordine dei fattori medesimi.

comune. Sarà dunque $\frac{6}{7}$ la somma delle frazioni $\frac{4}{7}$, e $\frac{2}{7}$. Così ancora si comprenderà facilmente che le frazioni $\frac{1}{15}$, $\frac{3}{15}$, e $\frac{7}{15}$ aggiunte insieme daranno la somma $\frac{11}{15}$; ed in generale *dovendosi insieme sommare delle frazioni dell' istesso denominatore, si aggiugneranno fra loro i numeratori, ed alla risultante somma si sottosegnerà il comune denominatore.*

Se le frazioni fossero di diverso denominatore prima si ridurrebbero alla denominazione medesima (47), e quindi si passerebbe a farne la somma. In tal maniera la somma delle frazioni $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{7}$, e $\frac{2}{9}$ ridotte prima al medesimo denominatore come segue $\frac{63}{189}$, $\frac{54}{189}$, $\frac{42}{189}$, sarà $\frac{159}{189}$.

49. Spesse fiate si vuol conoscere la somma di alcune quantità che contengono interi e fratti; cerchisi per esempio la somma dei due numeri $3\frac{2}{5}$, $5\frac{4}{7}$. Le frazioni $\frac{2}{5}$, e $\frac{4}{7}$ ridotte alla medesima denominazione diventano $\frac{14}{35}$, e $\frac{20}{35}$ la somma delle quali è $\frac{34}{35}$. Unendo questa somma all'altra 8 degl'interi 3 e 5, si avrà $8\frac{34}{35}$ per la dimandata somma delle due quantità $3\frac{2}{5}$, e $5\frac{4}{7}$. Così pure dovendo aggiugnere insieme i numeri $9\frac{2}{5}$, $6\frac{5}{7}$, si troverà la somma uguale a $15\frac{39}{35}$; avvertendo però che la frazione $\frac{39}{35}$ agguaglia $1\frac{4}{35}$ (7), l'accennata somma si esprimerà meglio per $16\frac{4}{35}$ (*).

(*) Già si avvertì nel numero 7 che frazioni impropriamente si appellano quelle che hanno il numeratore maggiore del denominatore, perchè siffatte espressioni contengono sempre degli interi. Sono esse peraltro i risultati di alcune delle principali operazioni che s'istituiscono sopra di determinate frazioni: così per esempio la somma delle due frazioni proprie $\frac{4}{8}$, e $\frac{7}{8}$ è la frazione impropria (la dicono altresì *spuria*) $\frac{11}{8}$, e si vedrà nei numeri seguenti che moltiplicando fra loro frazioni ed interi, ovvero dividendo interi per frazioni, o frazioni per frazioni, bene spesso ci verrà fatto di rinvenire i già mentovati risultamenti. Giova pertanto conoscere in generale il modo di poter estrarre gl'interi da una qualunque frazione spuria. Si abbia per esempio la espressione $\frac{307}{53}$ dinotando essa una grandezza di 307 parti, delle quali 53 compongono la unità, tante volte verrà questa stessa unità a contenersi nella medesima, quante volte il 53 si contiene in 307, sicchè dunque la divisione di 307 per 53 ne menerà alla cognizione del numero delle unità intere contenute nella data frazione. Si troverà in tal guisa $\frac{307}{53}$ espressa per $5\frac{42}{53}$. E qui non è a passare in silenzio una importante annotazione, che cioè una frazione qualunque esprime sempre una divisione, sia che essa possa eseguirsi, sia che no. Per verità $\frac{36}{12}$ esprime il quoziente di 36 diviso per 12; perocchè $\frac{1}{12}$ essendo contenuto 12 volte nella unità, $\frac{1}{12}$ ripetuto 36 volte, ossia $\frac{36}{12}$ (39), sarà pure contenuto 12 volte in 36 unità, ma il quoziente 3 che si ha dal dividere 36 per 12 si contiene eziandio 12 volte in 36 (28): dunque $\frac{36}{12}$ esprimerà il quoziente di 36 diviso per 12. Così ancora $\frac{4}{5}$ esprime il quoziente di 4 diviso per 5; perchè $\frac{1}{5}$ essendo contenuto 5 volte nella unità, sarà pure $\frac{1}{5}$ preso

50. Di un metodo analogo al già detto per la somma delle frazioni ci potremo giovare per eseguire la sottrazione delle medesime. Quindi *da una frazione si sottrarrà un' altra che abbia il medesimo denominatore togliendo il numeratore della frazione sottraenda da quello della minuenda, e sottoscrivendo al loro residuo il comune denominatore. Ove poi le frazioni fossero di diversa denominazione si ridurrebbero prima alla denominazione medesima.* Togliendo ad esempio $\frac{1}{6}$ da $\frac{1}{3}$ si otterrà per residuo $\frac{3}{18}$; e da $5\ \frac{2}{3}$ sottraendo $3\ \frac{1}{4}$ si giugnerà ad avere $2\ \frac{5}{12}$. Avviene non rare volte nel sottrarre un numero composto d'interi e fratti da un altro simile numero, che la frazione da sottrarsi è maggiore di quella da cui si deve togliere, così volendo da $12\ \frac{1}{8}$ sottrarre $3\ \frac{5}{9}$, ridotte le frazioni $\frac{1}{8}$ e $\frac{5}{9}$ al medesimo denominatore, da $\frac{9}{72}$ dovrebbe togliersi $\frac{40}{72}$, il che non è fattibile. In questo caso si aggiugnerà alla frazione $\frac{9}{72}$ una unità uguale a $\frac{72}{72}$, sicchè si abbia $\frac{81}{72}$; ed è chiaro che la questione con ciò riducesi a sottrarre $3\ \frac{40}{72}$ da $11\ \frac{81}{72}$, donde agevolmente si dedurrà il residuo $8\ \frac{41}{72}$.

51. Allorchè si propone a moltiplicare una frazione per un numero intero, si moltiplicherà il numeratore della frazione per l' intero sottoseguando al prodotto il denominatore (39). L'istesso dovrà farsi se un intero si vorrà moltiplicare per una frazione. Infatti moltiplicare per esempio 12 per $\frac{2}{5}$ significa sottoporre il 12 a quella operazione medesima a cui si è sottoposta la unità perchè si ottenesse $\frac{2}{5}$ (19); che però moltiplicheremo 12 per $\frac{2}{5}$ quante volte prenderemo le due quinte parti del numero 12. Or la quinta parte del numero 12 è $\frac{12}{5}$ che moltiplicata per 2 dà $\frac{24}{5}$ per le due quinte parti del numero 12. Adunque sarà $\frac{24}{5}$ il prodotto di 12, per $\frac{2}{5}$. Sicchè si moltiplicherà 12 per $\frac{2}{5}$ moltiplicando il numeratore 2 per 12, ed al prodotto 24 sottoscrivendo il denominatore 5.

52. *Si moltiplicherà una frazione per un'altra moltiplicando fra loro i due numeratori, ed al prodotto di questi sottoscrivendo il prodotto dei due denominatori.* Perocchè moltiplicare ad esempio $\frac{2}{5}$ per $\frac{3}{7}$ significa prendere tre settime parti della frazione $\frac{2}{5}$ (19). Or perchè si abbiano tre settime parti della frazione $\frac{2}{5}$, dovrà essa dividersi prima per 7 ed in seguito moltiplicarsi per 3, delle quali operazioni la prima si effettua col moltiplicare il suo denominatore per 7, e l'altra col moltiplicare per 3 il numeratore (39). Il prodotto adunque di $\frac{2}{5}$ per $\frac{3}{7}$ sarà $\frac{6}{35}$, che è una frazione avente per numeratore il prodotto di 2 per 3, e per denominatore quello di 5 per 7.

---

4 volte, ossia $\frac{4}{5}$, contenuto 5 volte in 4 unità: adunque $\frac{4}{5}$ ripetuto 5 volte sarà uguale a 4, e però 4 è il dividendo, 5 il divisore, $\frac{4}{5}$ il quoziente (27).

Segue dalla dimostrata proposizione che moltiplicando $\frac{2}{5}$ per $\frac{3}{7}$ si ottiene quel medesimo prodotto che si avrebbe quante volte dovesse moltiplicarsi $\frac{3}{7}$ per $\frac{2}{5}$ (21).

53. Possiamo ora dire alcuna cosa della moltiplicazione dei numeri composti d' interi e di frazioni. Debbasi ad esempio moltiplicare $3\frac{5}{7}$ per $4\frac{8}{9}$. Moltiplichiamo per la parte intera 4 del moltiplicatore prima la parte intera 3 e poi la fratta $\frac{5}{7}$ del moltiplicando, otterremo per prodotto l' intero 12 e la frazione $\frac{20}{7}$ (51), ossia l' intero 14 e la frazione $\frac{6}{7}$ (7); moltiplichiamo inoltre per la parte fratta $\frac{8}{9}$ del moltiplicatore le medesime parti intera e fratta del moltiplicando, avremo per prodotto le due frazioni $\frac{24}{9}$, $\frac{40}{63}$ (51. 52): ora è chiaro che la somma dei numeri 14, $\frac{6}{7}$, $\frac{24}{9}$, $\frac{40}{63}$ dovrà essere il prodotto cercato di $3\frac{5}{7}$ per $4\frac{8}{9}$. Portanto le due frazioni $\frac{6}{7}$, $\frac{24}{9}$ si riducono al medesimo denominatore della terza come segue $\frac{54}{63}$, $\frac{168}{63}$, che però la somma di tutte e tre sarà $\frac{262}{63}$ che, per ciò che è detto al numero 7, equivale a $4\frac{10}{63}$; il prodotto adunque di $3\frac{5}{7}$ per $4\frac{8}{9}$ sarà $18\frac{10}{63}$ (*).

54. Una frazione si divide per un intero moltiplicando il denominatore della frazione per l' intero (39). Ma supponghiamo che un intero debba partirsi per una frazione: ad esempio 7 per $\frac{2}{5}$. Dalla definizione della divisione data sopra (27) è chiaro che il dividendo deve essere uguale sempre al quoziente moltiplicato pel divisore; quindi nella supposizione che voglia dividersi per $\frac{2}{5}$ il numero 7, questo 7, che è il dividendo, dovrà aggnagliare il prodotto del quoziente pel divisore $\frac{2}{5}$, dovrà cioè esprimere i $\frac{2}{5}$ del quoziente (51). Adunque la metà di 7, ossia $\frac{7}{2}$, sarà uguale alla metà dei $\frac{2}{5}$ del quoziente, sarà cioè uguale a $\frac{1}{5}$ del quoziente. Or se $\frac{7}{2}$ è un quinto del quoziente, sarà $\frac{7}{2}$ moltiplicato per 5, cioè $\frac{35}{2}$, il quoziente cercato. Sicchè dunque dividere per la frazione $\frac{2}{5}$ il numero 7,

---

(*) Con molto più di agevolezza si moltiplicheranno fra loro le quantità $3\frac{5}{7}$, e $4\frac{8}{9}$ composte d' interi e di frazioni, riducendo prima gl' interi in frazioni. Or avvertendo a quanto è detto nella nota del numero 49, chiaro si scorge che in generale quante volte un intero vuol ridursi in frazione di dato denominatore, farà mestieri moltiplicare l' intero per questo denominatore, e pel medesimo dividere il prodotto. Deducesi quindi che riducendo gl' interi 3 e 4 in due frazioni, di cui la prima abbia 7 per denominatore, e la seconda 9, i numeri $3\frac{5}{7}$, e $4\frac{8}{9}$ potranno rappresentarsi con le seguenti frazioni $\frac{26}{7}$, e $\frac{44}{9}$. Il prodotto adunque di $3\frac{5}{7}$ per $4\frac{8}{9}$ sarà lo stesso che quello di $\frac{26}{7}$ per $\frac{44}{9}$. Ma il prodotto di $\frac{26}{7}$ per $\frac{44}{9}$ è $\frac{1144}{63}$, da cui estraendo gl' interi si ha $18\frac{10}{63}$. Adunque il prodotto di $3\frac{5}{7}$ per $4\frac{8}{9}$ sarà uguale a $18\frac{10}{63}$.

vale lo stesso che moltiplicare questo per $\frac{5}{2}$; ed in generale *perchè un numero qualunque venga diviso per una frazione, dovrà moltiplicarsi il numero per la frazione rovesciata.* Ho detto *un numero qualunque*, perchè questo teorema ha luogo nel caso ancora che il dividendo è una frazione. Infatti vogliasi dividere $\frac{7}{8}$ per $\frac{3}{4}$; dovrà il dividendo $\frac{7}{8}$ essere uguale a $\frac{3}{4}$ del quoziente, e però la terza parte di $\frac{7}{8}$, cioè $\frac{7}{24}$, uguaglierà la terza parte dei $\frac{3}{4}$ del quoziente, uguaglierà cioè $\frac{1}{4}$ del quoziente. Or se $\frac{7}{24}$ è $\frac{1}{4}$ del quoziente, $\frac{7}{24}$ moltiplicato per 4, vale a dire $\frac{28}{24}$, sarà il quoziente; donde apparisce che il quoziente della divisione di $\frac{7}{8}$ per $\frac{3}{4}$ si avrà moltiplicando (52) $\frac{7}{8}$ per la frazione $\frac{3}{4}$ rovesciata, cioè per $\frac{4}{3}$. Siffatta operazione può enunciarsi con la seguente proposizione. *Per dividere una frazione per un' altra farà d' uopo moltiplicare il numeratore della prima pel denominatore della seconda, e dividere il prodotto per quello che si ha dal moltiplicare il denominatore della prima pel numeratore della seconda.*

CAPO IV.

DELLE FRAZIONI DECIMALI.

55. Diciamo ora delle frazioni decimali. *Le frazioni decimali non cambiano il loro valore aggiugnendo o togliendo tanti zeri in fine quanti mai ne piacerà.* Si abbia la frazione decimale 0, 3900, a questa corrisponde la frazione ordinaria $\frac{3900}{10000}$ (8), la quale certamente non muterà di valore quante volte ambedue i termini suoi si moltiplichino o si dividano per 10, 100, 1000, ec. (40); saranno cioè le frazioni (23)

$$\frac{3900}{10000},\ \frac{39000}{100000},\ \frac{390000}{1000000},\ \frac{3900000}{10000000},\ \text{ec.},\ \frac{390}{1000},\ \frac{39}{100}$$

tutte uguali fra loro. Ma a siffatte espressioni corrispondono le altre

0, 3900; 0, 39000; 0, 390000; 0, 3900000; ec.; 0, 390; 0, 39.

Adunque ec. *Gli zeri però aggiunti ovvera tolti innanzi fra la virgola e la prima cifra significativa faranno diminuire ovvero crescere il valore di una frazione decimale per modo che questa diventerà dieci, cento, mille, ec. volte minore ovvero maggiore, secondo che uno, due, tre, ec. zeri saranno stati in siffatta guisa aggiunti ovvero tolti.* Si proponga infatti la frazione decimale 0, 0039, questa equivale alla frazione ordinaria $\frac{39}{10000}$ (9).

Ma una frazione ordinaria diventa dieci, cento, mille, ec. volte minore allorchè per 10, 100, 1000, ec. si moltiplica il suo denominatore (54). Sarà quindi $\frac{39}{100000}$ dieci volte, $\frac{39}{1000000}$ cento volte, $\frac{39}{10000000}$ mille volte, ec. minore di $\frac{39}{10000}$; cioè 0, 00039 dieci volte, 0, 000039 cento volte, 0, 0000039 mille volte, ec. minore della proposta 0, 0039. Dividendo ora per 10 il denominatore della frazione $\frac{39}{10000}$, si otterrà $\frac{39}{1000}$, la quale n'è dieci volte maggiore (39); sarà perciò 0, 039 dieci volte maggiore di 0, 0039. Che se si fosse diviso per 100 il denominatore della frazione $\frac{39}{10000}$, si sarebbe ottenuto $\frac{39}{100}$ che n'è cento volte maggiore; la frazione cioè 0, 39 è cento volte maggiore di 0, 0039.

56. La somma dei fratti decimali non ha alcuna difficoltà, effettuandosi essa come quella degl'interi, giacchè le parti decimali si compongono le une per mezzo delle altre nella medesima foggia che le unità intere (8); solo dovrà avvertirsi di scrivere i numeri in modo che le virgole sieno tutte situate in una medesima colonna verticale, e quindi che i decimi cadano sotto i decimi, i centesimi sotto i centesimi, e così di seguito; ed è chiaro che la virgola della somma verrà allora a cadere nella colonna medesima in cui trovansi quelle dei numeri da sommarsi. Eccone alcuni esempii

$$\begin{array}{r} 2,\ 1456 \\ 15,\ 9684501 \\ 7,\ 88921 \\ \hline 26,\ 0032601 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0,\ 08901 \\ 26,\ 01 \\ 3,\ 902 \\ \hline 30,\ 00101 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4,\ 0301 \\ 13,\ 03 \\ 24,\ 1 \\ 3,\ 00002 \\ \hline 44,\ 16012 \end{array}$$

57. La sottrazione dei decimali è altresì agevole a praticarsi, eseguendosi essa come quella dei numeri interi. Si dovrà soltanto aver l'accortezza di rendere uguali con degli zeri le cifre del minuendo a quelle del sottraendo quando ciò bisognasse. Così se 2, 9300231 dovesse sottrarsi da 3, 00441, si aggiugnerebbero a quest'ultimo due zeri a destra (55), dopo di che, scrivendo i numeri come si è indicato sopra, la sottrazione si eseguirebbe come quì appresso

$$\begin{array}{r} 3,\ 0044100 \\ 2,\ 9300231 \\ \hline 0,\ 0743869 \end{array}$$

Seguono degli esempii per esercizio

$$\begin{array}{r} 16,\ 02000 \\ 3,\ 84156 \\ \hline 12,\ 17844 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2,\ 01491 \\ 1,\ 835 \\ \hline 0,\ 17991 \end{array}$$

58. *Dovendosi fra loro moltiplicare due frazioni decimali fa d'uopo astrarre dalle virgole ed istituire la operazione come negl'interi, quindi nel*

prodotto in tal guisa ottenuto si separeranno con la virgola a destra tante cifre decimali quante sono quelle che si contengono nei due fattori. Sia da moltiplicarsi o , 61 per o , 42 ; moltiplicando 61 per 42 si otterrà per prodotto 2562 , che però il prodotto cercato di o , 61 , per o , 42 sarà o , 2562. Infatti o, 61 è cento volte minore di 61, poichè o, 61 è uguale a $\frac{61}{100}$, per la ragione medesima sarà o, 42 cento volte minore di 42. Il prodotto adunque di o, 61 per o, 42 dovrà essere dieci mila volte minore del prodotto 2562 di 61 per 42, dovrà cioè essere uguale a $\frac{2562}{10000}$, ovvero a o, 2562. Veggansi i segnenti esempii

```
   172, 84              15, 05
    36, 003              3, 12
   ---------           --------
     51852              30 10
  1037 04             1 50 5
  5185 2             45 15
  ----------         --------
  6222,75852         46,95 60
```

Che se le cifre del prodotto che si ha, operando senza aver riguardo alla virgola, non fossero tante quante le cifre decimali nell' nno e nell'altro fattore, dovrebbero aggiugnersi a sinistra allato al prodotto medesimo tanti zeri(55), quanti farebbe mestieri perchè il numero delle cifre decimali pervenisse ad agguagliare quelle dei due fattori. Si voglia per esempio moltiplicare o , 624 per o , 003. Formando primieramente il prodotto di 3 per 624 si conseguirebbe 1872 : ma questo contiene solamente quattro cifre , mentre per ottenere il dimandato prodotto fa d' uopo separare sei cifre decimali ; si dovranno dunque porre a sinistra accanto al nnmero 1872 due zeri, ed il tutto separare con la virgola da un altro zero che si pone al luogo delle unità intere. Eccone un esempio

```
     2, 00006
     o, o34
    ---------
     8 00024
    60 0018
  -------------
  o, o68 00204
```

59. *La divisione dei fratti decimali , fatta astrazione dalle virgole , si effettua come quella dei numeri interi; nel quoto per altro che in tal guisa si ottiene si separano a destra con la virgola tante cifre decimali, di quanta il dividendo supera quelle del divisore.* Debba dividersi 112, 7094 per 15, 231, non badando punto alla virgola la divisione si eseguirà come se tutte le cifre dei numeri proposti esprimessero unità intere.

15 , 231 | 112,7094 | 7 , 4
106 617
6 0924
6 0924
0

Il quoto che così otterrassi sarà 74. Intanto le cifre decimali del dividendo superano quelle del divisore di una solamente ; adunque nel 74 con la virgola separando a destra la sola cifra 4, esprimerà 7 , 4 il quoziente di 112, 7094 per 15 , 231. La ragione dovrà ripetersi dalla definizione della divisione (27) per cui si sa che il quoziente moltiplicato pel divisore deve riprodurre il dividendo. Sicchè le cifre decimali nel quoziente e nel divisore dovranno insieme essere tante, quante se ne hanno nel dividendo (58). Quindi ec.

60. Quantunque volte eseguita la divisione delle frazioni decimali considerate come numeri interi, il quoto non contenesse tante cifre quante pur si richiederebbe perchè le cifre decimali del quoziente cercato unite a quelle del divisore uguagliassero le cifre decimali del dividendo, si porrebbero a sinistra innanzi a quel quoto tanti zeri (55), quanti ad ottener ciò farebbe mestieri. Separando quindi il tutto a destra con la virgola da un altro zero che fa le veci delle unità intere, si giugnerebbe al quoziente cercato. Eccone un esempio

0, 123 | 0, 00121155 | 0, 00985
1107
1045
984
615
615
0

Da ultimo a far sì che le cifre decimali del dato dividendo non mai sieno da meno delle cifre decimali del divisore, si aggiugneranno, se farà d' uopo, in fine del dividendo a destra degli zeri ; del che ci avvarremo altresì tutte le volte che non abbia il dividendo tante cifre, quante si richiedono per andare innanzi nella divisione. Per darne un esempio si proponga a dividere 2 , 314 per 356, 27; la divisione si eseguirà come quì appresso

356 , 27 | 2,3140000 ec. . : . | 0 , 00649 ec. . . .
2 13762
176380
142508
338720
320643
18077
ec.

61. Apparisce ora in qual modo possano le frazioni ordinarie di qualunque sorta trasformarsi in frazioni decimali. Imperocchè già si sà (e da noi fu dimostrato nella nota del numero 49) che una frazione ordinaria rappresenta sempre una divisione accennata e non eseguita, in cui il dividendo è rappresentato dal numeratore della frazione ed il divisore dal denominatore. Ora per le frazioni proprie, per quelle cioè che hanno il numeratore minore del denominatore la divisione rimane solo indicata, e non è possibile eseguirla se non per via dei decimali. Propongasi ad esempio la frazione ordinaria $\frac{5}{8}$; il numeratore 5 ridotto in 50 decimi si divida pel denominatore 8; il quoziente sarà uguale a 6 decimi, e vi rimarranno 2 decimi. Questo resto ridotto in 20 centesimi si divida parimente per 8; si avranno per quoziente 2 centesimi con un resto di 4 centesimi. Riducendo da ultimo questo residuo in 40 millesimi, diviso che sarà per 8, darà per quoziente 5 millesimi senza resto. La divisione adunque di 5 per 8 eseguita con l'aiuto dei decimali dà un quoziente uguale a 6 decimi più 2 centesimi più 5 millesimi, equivalente a 0,625. Donde ricavasi che la frazione ordinaria $\frac{5}{8}$ è uguale alla decimale 0,625. Soggiungo qui la operazione di già descritta.

8 | 5,0 | 0,625
48
20
16
40
40
0

62. Volendo ridurre in frazione decimale la frazione ordinaria $\frac{2}{256}$ è a notarsi, che per eseguire la divisione, il numeratore non deve ridursi in decimi, nè tampoco in centesimi, ma in 2000 millesimi; che però nel quoziente non vi saranno decimi nè centesimi, ma al loro luogo farà d'uopo scrivere due zeri. Risulterà quindi la frazione ordinaria $\frac{2}{256}$ uguale alla decimale 0,0078125, come nella operazione che segue chiaramente si scorge.

256 | 2,000 | 0,0078125
1 792
2080
2048
320
256
640
512
1280
1280
0

Potremo adunque formare per la trasformazione dei fratti ordinarii in fratti decimali la seguente proposizione. *Per ridurre una frazione ordinaria in frazione decimale si scriveranno a destra nel numeratore tanti zeri quanti sono necessarii a renderlo divisibile pel denominatore ; eseguita la divisione e situata convenientemente la cifra del quoto a destra dopo la virgola, si continui la operazione aggiugnendo sempre un zero a destra infine di ciascun residuo , e segnando nel quoziente ciascuna cifra immediatamente appresso la ultima di già ottenuta.*

63. Spessissimo avviene che non abbia fine la divisione con cui si effettua la trasformazione delle frazioni ordinarie in decimali per quantunque si aggiungano zeri ai residui. Ci serva per esempio la frazione $\frac{4}{797}$. Convertendo il numeratore in 4000 millesimi si cominci a fare la divisione scritta qui sotto

```
797 | 4,000 | 0,0050188 ec.
      3 985
      -----
        1500
         797
        ----
         7030
         6376
         ----
          6540
          6376
          ----
           164
           ec.
```

Quindi conseguita che *non ogni frazione ordinaria può esprimersi esattamente col mezzo dei decimali* (*). Per altro ove di un fratto ordinario non possa ripetersi parecchie fiate espressione decimale esatta, potrà non pertanto ottenersi sempre approssimata, e approssimata tanto, quanto si vuole, potendosi continuare le divisioni a piacere.

64. Di molte cifre decimali dovendosi non rare volte senza errore sensibile omettere le ultime , pongasi mente a quanto segue.

Se la prima delle cifre omesse supera il 5 , o è il 5 medesimo ma seguito a

---

(*) Può dimostrarsi quest' asserzione in generale col seguente ragionamento. Il metodo che deve seguirsi per trasformare una data frazione ordinaria in decimale importa, come chiaro apparisce dal detto sopra (62), che il numeratore della frazione moltiplicato per 10, o per 100, o per 1000, ec. si divida pel denominatore; donde conseguita che, non essendo per ipotesi il denominatore un divisore esatto del numeratore primitivo, allora solo potrà aver fine la divisione quando il medesimo denominatore esattamente divida alcuno dei numeri 10, 100, 1000, ec. Ma questi numeri, comecchè tutti composti dal 10 moltiplicato più volte per se medesimo, non sono divisibili per altri numeri che per 2 e per 5, ovvero per altri che risultano dal combinare fra loro il 2 ed il 5. Adunque allora solamente avrà fine la divisione del numeratore della frazione moltiplicato per 10, o per 100, o per 1000 ec. pel denominatore, quando questo risulta dalla combinazione dei numeri 2 e 5. Quindi tutte le frazioni ordinarie in cui il denominatore risulta dal combinar fra loro numeri semplici diversi dal 2 e dal 5 non potranno esattamente esprimersi per frazioni decimali.

destra da altre cifre, la ultima di quelle che si ritengono dovrà aumentarsi di uno. Suppongasi che, avendo da una parte per un calcolo fatto ottenuto la frazione o, 3211547, faccia d' uopo dall' altra, trascurate le tre ultime cifre, adoperare le diecimillesime; dovrà in tal caso prendersi o,3212 piuttosto che o,3211. Infatti la differenza o,0000453 che passa tra o,3212 e o,3211547 è minore dell' altra o,0000547 che si ha tra o, 3211547 e o,3211, e però mancherà più in o, 3211 che non avanzerà in o, 3212; si commetterà quindi un errore più notevole facendo uso di o, 3211 che di o, 3212. Da quanto è detto rileviamo 1.° che, omettendosi la cifra 5 non seguita da altre decimali, si farà lo stesso errore sia che la ultima di quelle che si ritengono si aumenti di uno, sia che non si aumenti; nel primo caso l' errore si commetterà per eccesso, nel secondo per difetto. 2.° Che trascurandosi una cifra minore del 5, sebbene seguita da altre, anche maggiori, l'errore che si commette aumentando di uno la ultima delle cifre che si ritengono è maggiore di quello che si commetterebbe non aumentandola.

65. Cerchisi ora sviluppare in decimale la frazione ordinaria $\frac{12}{37}$, si otterrà o, 324324324 ec, in cui le cifre 324 si ripetono all' infinito. Così pure volendosi trasformare in decimale la frazione ordinaria $\frac{1}{7}$ si giugnerebbe ad avere o, 142857142857142857 ec. dove le cifre 142857 si ripetono altresì all' infinito. Infatti nella divisione di 12 per 37 nel modo sopra (62) esposto dopo le tre prime cifre del quoto si ha per residuo 12, e però la divisione comincia da capo col medesimo ordine, finchè dopo altre tre cifre del quoziente si abbia di nuovo 12 per residuo, e così di seguito all' infinito. Un simile ritorno osservasi nel dividere 1 per 7, perchè dopo le prime sei cifre del quoziente hassi per residuo 1, sicchè comincia da capo la divisione, e si ottengono quindi nel quoto le medesime sei cifre, dopo di che ritorna di nuovo 1 per residuo ec.

Le frazioni decimali in cui le cifre si ripetono nel modo già detto diconsi *periodiche*, e *periodo* si nomina il numero delle cifre che si ripetono: nella prima delle frazioni decimali rapportate qui sopra il periodo è 324, nell' altra è 142857. Ed è qui a notarsi che in qualunque espressione decimale periodica il numero delle cifre componenti il periodo non può mai esser maggiore del denominatore della frazione ordinaria che le corrisponde, nè tampoco agguagliarlo.

Per verità nelle divisioni, che s'istituiscono per ottenere lo sviluppo di una data frazione ordinaria in frazione decimale, dovendo ogni residuo riuscir minore del divisore, minore cioè del denominatore del dato fratto ordinario, il numero dei residui differenti fra loro non potrà sorpassare il denominatore medesimo diminuito di uno, e quindi al più dopo un ugual numero di operazioni tornando gli stessi residui, torneranno nel quoto le medesime cifre e ricomincerà il periodo.

66. Si sviluppino in decimali le frazioni $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{99}$, $\frac{1}{999}$, $\frac{1}{9999}$, ec. si avrà

$\frac{1}{9}$ uguale a o, 1111111 ec.

$\frac{1}{99}$ . . . o, 01010101 ec.

$\frac{1}{999}$ . . . o, 001001001 ec.

$\frac{1}{9999}$ . . . o, 00010001 ec.

In siffatte frazioni decimali periodiche il numero delle cifre componenti il periodo va sempre crescendo; nella prima il periodo è di una sola cifra che è 1, nella seconda il periodo è 01, nella terza 001, nella quarta 0001 ec.

Posto ciò si potrà sempre e con molta agevolezza assegnare la frazione ordinaria corrispondente ad una decimale periodica qualunque. Si abbia 0,33333 ec. di cui il periodo è di una sola cifra; se questa si paragoni con l'altra 0,11111 ec., si vedrà che la prima uguaglia la seconda moltiplicata per 3. Ma la frazione 0, 11111 ec. è uguale a $\frac{1}{9}$. Dunque sarà 0, 33333 ec. uguale a $\frac{3}{9}$ (51) ovvero ad $\frac{1}{3}$.

In secondo luogo propongasi la frazione 0,454545 ec.; comparandola con l'altra 0, 010101 ec., chiaro si scorge che ove questa si moltiplichi per 45 si otterrà la proposta. Adunque la frazione ordinaria $\frac{1}{99}$ corrispondente alla decimale 0, 010101 ec. moltiplicata per 45 sarà la frazione ordinaria corrispondente alla decimale 0, 454545 ec. Ma la frazione $\frac{1}{99}$ moltiplicata per 45 dà $\frac{45}{99}$, la quale, dividendo ambedue i termini per 9, si riduce a $\frac{5}{11}$. Adunque $\frac{5}{11}$ è la frazione ordinaria corrispondente alla decimale periodica 0, 454545 ec. Nella guisa medesima si troverà che la frazione ordinaria corrispondente alla frazione decimale periodica 0, 285714285714285714 ec. è $\frac{285714}{999999}$, la quale, dividendo il numeratore ed il denominatore per 142857, si riduce a $\frac{2}{7}$. Ed in generale si stabilirà la proposizione. *Una frazione decimale periodica qualunque uguaglia la frazione ordinaria che per numeratore ha il periodo e per denominatore un numero composto di tanti* 9 *quante sono le cifre del periodo medesimo.*

67. Volendo ridurre ad una frazione ordinaria una frazione decimale periodica, nella quale il periodo non comincia se non dopo alcune altre cifre decimali, si trasporterà per poco la virgola immediatamente innanzi alla cifra da cui comincia il periodo; quindi si troverà la frazione ordinaria corrispondente alla decimale che vien dopo la virgola (66), considerando come intere unità le cifre che la precedono; ed in fine si dividerà il risultato per 10, o per 100; o per 1000, ec. avendo riguardo al numero delle cifre decimali che, mediante il trasporto della virgola, sono passate a destra dalla parte delle unità intere (55). Dovendo per esempio trasformare in ordinaria la frazione decimale 0,056818181 ec. la scriveremo primieramente come segue 56, 818181 ec.; la parte 0,818181 ec. riducendosi a $\frac{81}{99}$, otterremo il risultato $56\frac{81}{99}$, il quale evidentemente dovrà partirsi per 1000 perchè rappresenti la frazione decimale proposta, giacchè questa, trasportando la virgola immediatamente innanzi alla cifra 8, dalla quale comincia il periodo, è venuta a moltiplicarsi per 1000. Or egli è chiaro che per ottenere il quoziente della divisione di $56\frac{81}{99}$ per 1000 fa mestieri sommare fra loro le due frazioni $\frac{56}{1000}$, $\frac{81}{99000}$, le quali perciò ridotte al medesimo denominatore, daranno $\frac{5625}{99000}$. Questa frazione adunque, che (44. 45) senza la menoma difficoltà si riduce a $\frac{5}{88}$, sarà la frazione ordinaria corrispondente alla frazione decimale 0, 056818181 ec.

CAPO V.

DEI NUMERI CONCRETI.

68. Quantunque la divisione decadica delle unità sia comodissima, come può facilmente scorgersi dal fin qui detto delle frazioni decimali, nulladimeno per gli usi comuni e per quelli altresì della scienza alcune unità sogliono presso i più ben altrimente dividersi. Additerò qui i nomi delle frazioni di diverse unità che sono le più comuni.

La circonferenza del circolo si divide in 360 unità uguali che chiamano *gradi*, il grado poi si divide in 60 *minuti primi*, ogni minuto primo in 60 *minuti secondi*, ed ogni minuto secondo in 60 *minuti terzi*; più generalmente però le parti del minuto secondo sogliono assegnarsi per via di frazioni decimali. Si sono dati dei segni a queste diverse parti ed invece di scrivere per esempio 40 *gradi*, 31 *primi*, 52 *secondi*, e 24 *terzi*, si scrive $40^{\circ}\ 31'\ 52''\ 24'''$, ovvero $40^{\circ}\ 31'\ 52''$, 4, avvertendo che $24'''$ equivalgono a 0, 4 di minuto secondo.

Il tempo ognuno sa che si divide in *giorni*, ogni giorno poi si divide in 24 parti uguali chiamate *ore*, l'ora, come il grado, si divide in 60 *minuti primi*, il minuto primo in 60 *minuti secondi* ec. e quindi col numero $2^{g}\ 13^{h}\ 23'\ 34''$, 25 s' indicano 2 *giorni*, 13 *ore*, 23 *minuti primi*, 34 *minuti secondi* con 25 centesimi di minuto secondo. Queste parti decimali si esprimono altresì con i *minuti terzi*, 60 dei quali formano un minuto secondo, in modo che la frazione 0, 25 equivalga a 15 minuti terzi.

Per unità di misura lineare, ossia di lunghezza, presso i Francesi, prima che fra i medesimi s' introducesse il sistema metrico decimale, era la *tesa*, la quale si divideva in 6 *piedi*, il piede poi in 12 *pollici*, il pollice in 12 *linee*, la linea in 12 *punti*. Ora però il *metro* (*) è la unità di misura in lunghezza presso i Francesi che si divide in parti decimali. Presso noi Napolitani la unità di lunghezza è il *palmo* (**), che prima della introduzione del sistema metrico decimale, si divideva in 12 *once*, e l' oncia in 5 *minuti*; la lunghezza poi di 8 palmi formava la *canna*, mentre ora la canna è di 10 palmi. Nella Toscana il *braccio* (***) è la unità di lunghezza e si divide in 20 *soldi*, e il soldo in 12 *denari*; cinque braccia formano la *canna toscana*.

La unità di superficie che serve a misurare la estensione dei campi, e la grandezza dei terreni è in Napoli il *moggio*, il quale prima del nuovo sistema avea 30 passi di lunghezza ed altrettanti di larghezza, essendo ciascun passo uguale a palmi $7\frac{1}{3}$ (****), e però veniva a formare un quadrato avente per lato 220 palmi;

(*) La tesa è uguale a metri 1, 94904. Il metro poi è la diecimilionesima parte del quarto del meridiano terrestre.

(**) Il palmo è la settemillesima parte di un minuto primo del grado medio del meridiano terrestre equivalente alla settemillesima parte del miglio geografico italiano, o miglio nautico di 60 a grado; 100 metri uguagliano 378 palmi, donde si deduce il palmo uguale a 0, 26455 di metro.

(***) Il metro corrisponde ad 1 braccio, 14 soldi, e denari 3, 223, ossia a braccia 1, 71343, ed il braccio a 0, 58362 di metro.

(****) Il nostro passo itinerario, che è la millesima parte del nostro miglio, che è il nautico, è diverso dal passo regolatore delle misure agrarie del Regno, giacchè il passo itinerario è di soli 7 palmi.

ora però il moggio è un quadrato che ha per lato 100 palmi, ed è diviso in parti decimali. In Toscana il *braccio quadrato* è la unità superficiale che si divide come il braccio lineare in soldi, e denari quadrati. In Francia prima usavasi la *tesa quadrata* per unità di superficie divisa come la tesa lineare in piedi, pollici, linee, e punti quadrati; ma al presente la unità di superficie presso i Francesi dicesi *ara* ed è un quadrato che ha per lato il *decametro* equivalente a dieci metri.

Le unità di capacità per i liquidi sono due in Napoli. Per l'olio la unità di misura è lo *staio* diviso in 16 *quarti*, e ciascun quarto in 6 *misurelli*. Una *salma* componesi di 16 staia. Giusta però la nuova legge dei 6 Aprile 1840 intorno ai pesi ed alle misure, l'olio è misurato a peso, e solamente pel commercio a minuto è permesso misurarlo a capacità. Pel vino la unità di misura è il *barile*, il quale anche adesso è diviso in 60 *caraffe*. Il solo barile è la unità di capacità per i liquidi in Toscana e si divide pel vino in 20 *fiaschi* e in 16 per l'olio. La *tesa cubica* in Francia era la unità di capacità per i liquidi con le divisioni e suddivisioni della tesa lineare, esse pur cubiche; ma ora il *litro* è la unità di capacità per i liquidi, ed è un cubo che ha per lato la decima parte del metro.

Le misure di capacità per i liquidi sono in Francia le medesime che per gli aridi. In Napoli però la unità di capacità per gli aridi è diversa da quella dei liquidi: essa dicesi *tomolo* che dividesi in 2 *mezzette*, o in 4 *quarte*, ovvero in 24 *misure*. Per gli aridi il *sacco* in Toscana è la unità di misura, e si divide in 3 *staia*.

La unità di peso in Napoli è il *rotolo* che prima della succennata legge per la maggior parte dei generi che si contrattavano a peso si divideva in *once* $33\frac{1}{3}$ in modo che 100 once venivano a formare 3 rotoli. Un peso di cento rotoli dicesi *cantaio* anche adesso che il rotolo si divide in parti decimali. Per non pochi generi però per unità di peso usavasi la *libbra* che si divideva in 12 *once* (uguali a quelle del rotolo); l'oncia in 10 *dramme*, la dramma in 3 *scrupoli*, lo scrupolo in 20 *acini* o *grani*. Ora la libbra è presso di noi abolita ed invece si è sostituito il peso di 36 centesimi di rotolo. I Francesi ancora la unità di peso chiamavano *libbra*, la libbra dividevano in 2 *marchi*, il marco in 8 *once*, l'oncia in 8 *grossi*, il grosso in 8 *denari*, il denaro in 24 *grani*. In parecchie altre parti la unità di peso appellasi ancora libbra che dividesi in modo diverso da quello con cui noi ed i Francesi la dividevamo.

Da ultimo la unità di moneta in Napoli è il *ducato* che anche prima del nuovo sistema metrico decimale si divideva in parti decimali. Appo i Toscani è la *lira* la unità di moneta, che si divide, come il loro braccio, in 20 *soldi* e 12 *denari*. I Francesi invece della lira hanno ora per unità di moneta il *franco* che dividono in parti decimali. Il ducato Napolitano equivale a franchi 4, 25.

69. Passo ora a dire alcuna cosa intorno alle quattro principali operazioni sulle frazioni delle unità di pesi e di misure. Per sommare o sottrarre fra loro, e per moltiplicare o dividere per qualche numero le frazioni delle unità esprimenti pesi e misure, dovremo far uso di quei metodi stessi per noi usati con tutte le altre della medesima specie; giacchè anche le parti nelle quali dividiamo l'ora, il minuto primo, la libbra, l'oncia, ec. sono effettivamente frazioni a cui per questo solo non apponiamo denominatore perchè già si sa quante di esse facciano d'uopo per formare quella che è prossimamente maggiore.

70. Soggiungo primieramente alquanti esempii di somma

36°	25'	47"	3
49	33	28	0
55	31	49	8
141	31	5	1

4h	5'	6"	3
11	7	43	6
8	24	56	0
23	37	45	9

tese	piedi	pollici	linee	punti
13	3	11	10	11
5	4	10	9	0
1	2	3	4	0
	4	0	11	4
21	3	2	11	3

canne	palmi	once	minuti
12	7	11	4
4	3	9	3
	5	6	2
3	0	3	1
21	1	7	0

Cominciando sempre dalla destra, nel primo esempio si riuniranno prima i decimi di minuto secondo, e la somma sarà 11, che equivale a 1", 1. Segnando 1 al luogo dei decimi si ritenga il minuto secondo per aggiugnerlo con gli altri minuti secondi che si trovano nella colonna che segue; la somma di questi sarà perciò uguale a 125, da cui togliendo 120 minuti secondi che formano 2 minuti primi, il resto 5 si segnerà al suo luogo, e i 2 minuti primi si riterranno per sommarli insieme con i minuti primi che vengono nella colonna seguente; sicchè la somma dei medesimi sarà 91 che equivale ad un grado più 31 minuti primi. Scrivendo questi sotto la propria colonna si trasmetta il grado nell'altra seguente che contiene i gradi, dei quali la somma sarà perciò uguale a 141. Con analoghe riduzioni si farebbe l'addizione nel secondo esempio essendo l'ora suddivisa in minuti primi e secondi come il grado. Nel terzo esempio essendo 15 la somma dei punti, 3 soltanto rimarranno nel proprio luogo, e gli altri 12 formando una linea aumenteranno di uno il numero delle linee. Si otterranno così 35 linee che daranno due unità al numero dei pollici, e lasceranno 11 nel proprio luogo. Nella medesima guisa i 26 pollici che quindi si produrranno, daranno due unità al numero dei piedi e lasceranno 2 da segnarsi nel proprio luogo: i 15 piedi due unità daranno al numero delle tese e lasceranno 3 da scriversi sotto la propria colonna. Finalmente la somma delle tese sarà 21. Riuscirà ora agevole ad ognuno il rifare la somma nel quarto esempio, rammentandosi della divisione e suddivisione della canna napolitana in palmi, once, e minuti.

71. La sottrazione si eseguirà come nei seguenti esempii

22h	21'	46"	5
4	30	37	8
17	51	8	7

lire	soldi	denari
655	13	4
30	16	8
624	16	8

Ma a togliere qualunque difficoltà, dovrà in generale avvertirsi che, incominciandosi la operazione sempre dalla destra, ove alcuna delle parti del sottraendo ecceda le rispettive nel minuendo, si farà ricorso alle parti che vengono dopo nel minuendo medesimo, onde avere tante parti della classe di quelle da sottrarsi,

quante bastino a rendere possibile la sottrazione. Così nel primo esempio non potendosi togliere 5 decimi da 8, prendasi uno dal numero dei minuti secondi che vale 10 decimi, e da 15 sottraendo 8 rimarranno 7. Similmente non potendosi togliere 30 dai 21 minuti primi, si prenda dalle ore uno, che vale 60 minuti primi, e da 81 si sottragga 30, avanzeranno di residuo 51.

72. Per ciò che si spetta alla moltiplicazione, sia in primo luogo da moltiplicarsi il numero

palmi	once	minuti
3 .	9 .	4

per l' altro $2\frac{2}{3}$. Poichè 9 once valgono $\frac{9}{12}$ di palmo, e 4 minuti $\frac{4}{5}$ di oncia, ovvero $\frac{4}{5}$ di $\frac{1}{12}$ di palmo, uguali a $\frac{4}{60}$ di palmo, il moltiplicando si esprimerà con 3 più la somma delle frazioni $\frac{9}{12}$ e $\frac{4}{60}$. Ora le frazioni $\frac{9}{12}$ e $\frac{4}{60}$ si riducono a $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{15}$, e queste ridotte prima al medesimo denominatore e quindi fra loro aggiunte danno $\frac{49}{60}$. Sarà dunque il moltiplicando espresso per $3\frac{49}{60}$, ovvero per $\frac{229}{60}$. Eseguendo (52) la moltiplicazione di $\frac{229}{60}$ per $2\frac{2}{3}$, ossia per $\frac{8}{3}$, otterremo il prodotto $\frac{1832}{180}$, i cui termini divisi due volte per 2 lo muteranno in $\frac{458}{45}$. Da questa frazione estraendo le unità intere che vi si contengono, si giugnerà ad avere $10\frac{8}{45}$, e però il prodotto cercato sarà 10 palmi più $\frac{8}{45}$ di palmo. Ma $\frac{8}{45}$ di palmo uguagliano $\frac{8}{45}$ di oncia ripetuti 12 volte, uguagliano cioè once $2\frac{6}{45}$; e $\frac{6}{45}$ di oncia equivalgono a $\frac{6}{45}$ di minuto presi 5 volte, cioè a $\frac{30}{45}$ ossia a $\frac{2}{3}$ di minuto. Adunque il prodotto di palmi 3, once 9, e minuti 4 per $2\frac{2}{3}$ agguaglia

palmi	once	minuti
10 .	2 .	$0\frac{2}{3}$

Vogliasi in secondo luogo moltiplicare 0° 59' 8", 33 per 365, 24225. Poichè 59' valgono $\frac{59}{60}$ di grado, e 8", 33 uguagliano $\frac{8,33}{60}$ di minuto primo ossia $\frac{8,33}{3600}$ di grado, potrà, riducendo le due frazioni ordinarie $\frac{59}{60}$, $\frac{8,33}{3600}$ in decimali, il moltiplicando 0° 59' 8", 33 rappresentarsi ancora per 0°, 98564. Eseguendo quindi la moltiplicazione di 0°, 98564 per 365, 24225, troveremo il cercato prodotto uguale a 359°, 99737. Avvertasi però che 0, 99737 di grado equivalgono a 0, 99737 di minuto primo moltiplicati per 60, cioè a dire formano 59', 8422. Similmente 0, 8422 di minuto primo compongono 50", 532. Sarà dunque il prodotto di 0° 59' 8", 33 per 365, 24225 ancora espresso per 359° 59' 50", 532.

73. Che se il numero

palmi once minuti
3 . 9 . 4

volesse dividersi per $2\frac{2}{3}$, dovrebbe la frazione $\frac{229}{60}$ dividersi per l' altra $\frac{8}{3}$, Il quoziente adunque sarebbe uguale al prodotto di $\frac{229}{60}$ per $\frac{3}{8}$, che è $\frac{687}{480}$, da cui estraendo gl' interi, otterrassi $1\frac{207}{480}$. Con un ragionamento del tutto analogo a quello fatto nel numero precedente si dimostrerà la frazione di palmo $\frac{207}{480}$ uguale a 5 once e $\frac{7}{8}$ di minuto. Adunque il quoziente cercato sarà 1 palmo, 5 once, e $\frac{7}{8}$ di minuto.

74. Le frazioni di grado e di ora espresse per minuti primi e secondi si divideranno per qualsivoglia numero senza veruna difficoltà riducendo prima in parti decimali, come il dividendo, così pure il divisore, ove questo fosse una frazione ordinaria. Così se 0° 59' 8", 33 volesse dividersi per $\frac{2}{3}$, si dovrebbe per 0, 66666 dividere 0°, 98564, ed il quoto sarebbe 1°, 32847, ovvero ancora 1° 19' 42", 492.

75. Nel dare ora compimento a questo piccolo trattato di Aritmetica, credo far cosa grata ai giovani allievi, se qui presenti loro, come in un quadro, l'intero sistema metrico decimale francese; e quindi aggiunga pure i diversi articoli della legge dei 6 Aprile 1840, con cui si stabilisce in tutte le provincie del nostro Regno il nuovo sistema metrico, il quale in gran parte può dirsi *decimale*, perchè molte fra le principali misure vengono in esso stabilite con la divisione e suddivisione decimale.

QUADRO GENERALE

DEL SISTEMA METRICO DECIMALE FRANCESE

NOMI SISTEMATICI.	VALORI.
MISURE DI LUNGHEZZA.	
Miriametro	Diecimila metri.
Chilometro	Mille metri.
Ettometro	Cento metri.
Decametro	Dieci metri.
METRO	Unità fondamentale dei pesi e delle misure. Diecimilionesima parte del quarto del meridiano terrestre.
Decimetro	Decimo del metro.
Centimetro	Centesimo del metro.
Millimetro	Millesimo del metro.
MISURE AGRARIE.	
Ettara	Cento are, o 10000 metri quadrati.
ARA	Cento metri quadrati, quadrato di dieci metri di lato.
Centiara	Centesimo dell' ara, o metro quadrato.
MISURE DI CAPACITÀ *per i liquidi e per gli aridi.*	
Chilolitro	Mille litri.
Ettolitro	Cento litri.
Decalitro	Dieci litri.
LITRO	Decimetro cubo.
Decilitro	Decimo del litro.
MISURE DI SOLIDITÀ.	
Decastéro	Dieci stéri.
STÉRO	Metro cubo.
Decistéro	Decimo dello stéro.
PESI.	
....	Mille chilogrammi, peso del metro cubo di acqua e della tonnellata di mare.
....	Cento chilogrammi, quintale metrico.
CHILOGRAMMO	Mille grammi Peso nel vuoto di un decimetro cubo di acqua distillata alla temperatura di 4 gradi del termometro centigrado.
Ettogrammo	Cento grammi.
Decagrammo	Dieci grammi.
GRAMMO	Peso di un centimetro cubo di acqua a 4.° centigradi.
Decigrammo	Decimo del grammo.
Centigrammo	Centesimo del grammo.
Milligrammo	Millesimo del grammo.
MONETE.	
FRANCO	Cinque grammi di argento a 0, 9 di fino.
Decimo	Decimo del franco.
Centesimo	Centesimo del franco.

ARTICOLI DELLA LEGGE DEI 6 APRILE 1840.

Art. 1. Le misure ed i pesi di Napoli (Capitale) con i moltiplici e summoltiplici stabiliti negli articoli seguenti saranno comuni a tutte le provincie di questi nostri reali dominii.

Art. 2. La base dell'intero sistema, il *Palmo*, è la settemillesima parte di un minuto primo del grado medio del meridiano terrestre, ovvero la settemillesima parte del miglio geografico d'Italia, o miglio nautico di sessanta al grado medio del meridiano medesimo.

Esso sarà diviso in parti decimali, e dieci palmi costituiranno la *Canna*.

La canna lineare, la canna quadrata, e la canna cuba sono le unità di misura di lunghezza, di superficie, e di solidità per tutti gli usi. La prima è uguale a dieci palmi lineari, la seconda a cento palmi quadrati, la terza a mille palmi cubi.

Rapporto col sistema metrico decimale (francese): cento metri uguagliano trecento settantotto palmi, e quindi un palmo è uguale a metri 0, 26455.

Art. 3. La unità superficiale delle misure agrarie sarà il *Moggio* di diecimila palmi quadrati, o sia un quadrato che abbia uno dei lati cento palmi, o canne dieci.

Esso sarà diviso in parti decimali.

Art. 4. Il *Tomolo* è la unità delle misure di capacità per gli aridi. Esso equivale a tre palmi cubi, e si divide in due *mezzette*, o in quattro *quarte*, o pure in ventiquattro *misure*, ciascuna delle quali uguaglia il cubo del mezzo palmo.

La misura degli aridi sarà praticata sempre a *raso*, e non a *colmo*.

Art. 5. Il *Barile* è la unità delle misure di capacità per alcuni dei liquidi, come il vino, l'aceto, l'acqua, ec., e si divide in sessanta *caraffe*.

Esso equivale ad un cilindro retto del diametro di un palmo, e di tre palmi di altezza.

La *Botte* si compone di dodici barili; ed è perciò uguale ad un cilindro retto di tre palmi di diametro, e quattro palmi di altezza.

Art. 6. L'olio sarà misurato sempre a peso; a cantaia, a rotola, ed a frazioni decimali di rotolo.

Pel commercio a minuto potrà misurarsi a capacità: le misure dovranno essere di figura cilindrica e corrispondenti al peso di olio che debbono contenere alla temperatura di 20° del termometro centigrado.

Art. 7. Il *Rotolo* è la unità di misura per i pesi, e si dividerà in parti decimali: la sua millesima parte è il *trappeso*.

Il *Cantaro* si compone di cento rotola.

Rapporto col sistema metrico decimale (francese): un rotolo è uguale a chilogrammi 0, 890997.

Un palmo cubo di acqua distillata pesa in Napoli, nell'aria, rotola venti

e settecento trentasei trappesi alla temperatura di 16°, 144 del termometro centigrado, ed alla pressione barometrica di palmi 2,865 (settantasei centimetri).

Art. 8. Sarà tollerato per ora, e sino a nuova disposizione, che per i soli usi farmaceutici sia adoperato il peso della libbra colle sue attuali suddivisioni.

Art. 9. Il nostro Ministro Segretario di Stato degli affari interni farà costruire i campioni del sistema metrico come sopra sanzionato, dei quali una serie completa dovrà essere depositata e conservata in ciascuno dei capoluoghi di provincia e di distretto.

Per la figura e le dimensioni dei diversi campioni come anche per la materia nella quale dovranno essere costruiti, e per tutto altro che potrà riguardare la esecuzione della presente legge, e l'andamento di questo ramo di pubblica amministrazione, lo stesso nostro Ministro Segretario di Stato presenterà alla nostra approvazione tutti i regolamenti che stimerà necessarii.

Curerà pure che sieno compilate le tavole di rapporto delle misure di sopra stabilite con quelle sinora adoprate in ciascuna provincia o in ciascun comune, come potrà occorrere.

Art. 10. Oltre alle serie di campioni dell' articolo precedente, in ciascun capoluogo di provincia, in un posto garantito da ogni pericolo di alterazione, sarà esposto al pubblico il campione della mezza canna, o del quintuplo palmo, base dell' intero sistema, in metallo rosso, incastrato nel marmo, ed infisso in un solido muro, con le sue divisioni e suddivisioni decimali perchè possa ognuno con comodità ed a piacimento misurare la lunghezza di tutto o parte di esso, secondo il bisogno.

Art. 11. A cominciare dal primo del venturo anno mille ottocento quarantuno tutte le autorità, e tutte le pubbliche amministrazioni non potranno adoperare altri pesi, ed altre misure, che quelle sanzionate colla presente legge.

Sarà solamente permesso a tutto l'anno mille ottocento quarantacinque, cioè per cinque anni, di far uso nelle contrattazioni tra i privati dei pesi e delle misure delle quali potrà mai convenirsi, purchè però sieno precisamente enunciate nello stesso contratto, e le cifre che le rappresentano sieno immediatamente seguite dai valori corrispondenti nel sistema metrico stabilito negli articoli precedenti.

FINE DELL' ARITMETICA.

LIBRO SECONDO

ALGEBRA

CAPO I.

DELLE PRIME OPERAZIONI DELL' ALGEBRA.

76. Quella parte delle matematiche, che tutta si versa intorno alla quantità numerica, senza riguardo veruno alle differenti specie della quantità medesima, dicesi *Algebra*. Per verità la considerazione dei numeri forma l' obbietto proprio dell' Aritmetica; ma in questa non si considerano che casi particolari, laddove nell' Algebra le questioni sui numeri risolvonsi in generale senza che fia bisogno in ciascun caso particolare imprendere un nuovo calcolo. Ed è perciò che i numeri nell' Algebra si dinotano non solamente con le cifre arabe, di cui si fa uso nell' Aritmetica, ma eziandio con le lettere dell' alfabeto. Domandandosi per modo di esempio quali sono quei numeri di cui la somma è 5, e la differenza è 3; l'Aritmetica risolverà questo problema in particolare, e per altri simili, in cui la somma e la differenza dei numeri cercati è diversa, farà mestieri s' istituiscano nuovi calcoli al primo del tutto conformi. Per l' opposto nell' Algebra lo stesso problema si propone generalmente nella seguente guisa: data essendo la somma a e la differenza b di due numeri x ed y si domanda conoscere quali sieno questi numeri? ed il calcolo che per siffatta ricerca s' istituisce servirà per infiniti casi particolari, non dovendosi fare altro per un caso particolare qualunque che sostituire ad a e b nella soluzione generale i numeri corrispondenti a questo caso. Moltissimi altri pregi adornano l'Algebra per cui a tutta ragione si distingue dall' Aritmetica: i principali però sono 1.° il condurre con prontezza mirabile a risultamenti che ben di rado si otterrebbero con l'Aritmetica senza lunghe operazioni ed incerte; 2.° lo esprimere che essa fa con singolare semplicità questi risultamenti medesimi, mentre l' Aritmetica non saprebbe

senza molte parole indicarli; 3.° finalmente il risolvere una infinità di questioni intrigatissime, alle quali non è permesso in modo alcuno di giugnere alla comune Aritmetica.

77. Nell' Algebra col segno + si esprime l' addizione, con l'altro — la sottrazione, in guisa che il segno + posto innanzi al numero b dinoti che b si adopera ad aumentare un certo numero a, ed il segno — posto innanzi allo stesso numero b indichi che serve b a diminuire a. Che però i segni + — modificano il significato dei numeri ai quali si riferiscono, e *positivi* diconsi quelli che sono affetti dal primo, *negativi* gli altri cui si premette il secondo. Adunque una data grandezza in quanto si paragona con un' altra che sia della medesima specie e si prenda come unità di misura, può esprimersi per un vero numero (1); in quanto poi si adopera ad aumentarne o diminuirne un' altra, dinotasi per un numero positivo o negativo. I numeri tutti cui niun dei segni + — premettesi, si riguardano come positivi; sicchè, come per $+b$, così ancora per b, si potrà rappresentare un numero positivo qualunque. Finalmente i numeri $+b$ e $-b$, che hanno il medesimo valore b diconsi opposti fra loro.

78. Dal detto conseguita che la espressione $a+b$ significherà che il numero b è aggiunto ad a; significherà cioè la somma di a e b: essa si pronuncia *a più b*. Così pure $a+b+c$ vorrà dire che i numeri b e c sono ambedue aggiunti ad a, si esprimerà cioè per $a+b+c$ la somma dei tre numeri a, b, c. Se ad a dovesse aggiugnersi a invece di $a+a$ si scriverebbe $2a$, e per la convenzione medesima sarebbe $2a+a+a=2a+2a=4a$, $4a+a+2a=7a$, ec. dove il segno = dinota uguaglianza. I numeri arabi posti innanzi a quelli che si rappresentano con le lettere appellansi *coefficienti*. Così nelle quantità $2a$, $4a$, $7a$, i numeri 2, 4, 7 diconsi coefficienti di a. Allorchè poi una lettera manca di coefficiente s' intende che essa abbia la unità per coefficiente; infatti $a=1a$, ma la unità sempre si tralascia.

79. La espressione $a-b$ si legge *a meno b*: essa significa (77) che il numero a si è diminuito di b; rappresentasi cioè con $a-b$ la differenza ovvero il residuo che si ottiene dal sottrarre b da a. Parimente $a+b-c$ vuol dire che il numero c si è sottratto dalla somma dei due numeri a e b. Quindi conseguita che $a-a=0$, $2a-a=a$, $5a-3a=2a$, ec. Vicendevolmente sarà $a-2a=-a$, $3a-5a=-2a$, ec; infatti far crescere un certo numero k prima di a, e poi diminuirlo del doppio di a vale lo stesso che diminuirlo soltanto di a, si ha cioè $k+a-2a=k-a$, donde $a-2a=-a$; così pure aumentare il numero k di $3a$, ed in seguito diminuirlo di $5a$ è lo stesso che diminuirlo di $2a$ solamente, sarà cioè $k+3a-5a=k-2a$, e quindi $3a-5a=-2a$, ec.

Nel sommare e nel sottrarre le quantità algebriche niun riguardo dovrà aversi all' ordine con cui queste saranno scritte; poichè senza dimostrazione alcuna suol tenersi per evidente che $a+b$ vale lo stesso che $b+a$, come ancora la espressione $a-b$ si suppone identica a $-b+a$. Tornerà però conto di attenersi per quanto si può all' ordine dell' alfabeto.

80. Il segno × ovvero un punto posto in mezzo alle quantità a e b indica che a si moltiplica per b; le formole adunque $a\times b$, $a\cdot b$ esprimeranno ambedue il prodotto di a per b. Più comunemente però, ove altro non richieggano le circostanze, il prodotto di due o più fattori s' indica col semplicemente unirli insieme: così delle espressioni ab, abc, $abcd$, ec. rappresenta la prima il prodotto delle due quantità a, b, la seconda quello delle tre a, b, c, la terza quello delle quattro a, b, c, d, ec. I coefficienti, allorchè fra loro si moltiplicano le quantità

algebriche cui appartengono, si moltiplicheranno altresì fra loro con le comuni regole dell' Aritmetica, ed il prodotto si porrà innanzi a quello delle lettere: esprimerà quindi $15ab$ il prodotto di $5a$ per $3b$, e $48abc$ quello dei tre fattori $6a$, $4b$, $2c$. Anche qui dovrà avvertirsi che non si muterà il prodotto di due o di più quantità, qualunque sarà l' ordine che si terrà nello scriverle. Infatti (21) $ab=ba$, e quindi sarà $abc=bac=bca$, dove il fattore a si trova successivamente il primo il secondo ed il terzo, e l'istesso potrebbe essere di uno qualunque degli altri due. Per la ragione medesima sarà pure $abcd=bacd=bcad=$ $=bcda$ ec.

81. La divisione di a per b dinotasi con $\frac{a}{b}$, ovvero con $a:b$. Se un prodotto qualunque ab voglia dividersi per uno dei suoi fattori b, il quoto sarà l'altro fattore a; infatti la quantità a moltiplicata prima per b e poi divisa per b si rimarrà la stessa; sarà dunque $\frac{ab}{b}=a$, e per la ragione medesima $\frac{abc}{c}=ab$, $\frac{aaa}{aa}=a$, ec. Ove poi il dividendo e il divisore contenessero dei coefficienti numerici, di questi si farebbe la divisione al solito: così volendo dividere $27abc$ per $9bc$ si otterrebbe per quoziente $3a$.

Le quantità algebriche diconsi *semplici* o *monomie* quante volte non vengano divise dai segni + o —, chiamansi poi *complesse* o *polinomie* quelle che composte sono di molte parti fra loro disgiunte dai segni + o —. Ad esempio la quantità $ab+3ac+4bd+2c$ dicesi polinomio, e i *termini* di lei, cioè ab, $3ac$, $4bd$, $2c$ si chiamano monomii. Se il polinomio è composto di due, tre, quattro, ec. termini con nome particolare appellasi *binomio*, *trinomio*, *quatrinomio*, ec.

82. *Volendosi aggiugnere insieme più quantità polinomie, si dovranno prima come le monomie unire fra loro con i segni che hanno, facendo in seguito la riduzione dei termini simili conforme al detto sopra* (78. 79). Se per esempio $4a+2b-3c$ dovrà aggiugnersi a $5a-5b+7c$, si otterrà per la somma $4a+2b-3c+5a-5b+7c=9a-3b+4c$. Ma per più di agevolezza tornerà meglio scrivere le date quantità una sotto dell' altra situando nella medesima linea verticale i termini simili. Si abbiano per esempio i tre polinomii $aa+4ab+3bb-h$, $7aac+8ab-3bb+2g$, $aac-13ab-5bb-h-k+bc$, disponendoli come segue

$$\begin{array}{lllllllll}
aa & & +4ab & +3bb & -h & & & \\
 & 7aac & +8ab & -3bb & & +2g & & \\
 & aac & -13ab & -5bb & -h & & -k & +bc \\
\hline
\end{array}$$

sarà la somma $= aa+8aac-\ \ ab-5bb-2h+2g-k+bc$

Sarà ben fatto il soggiugnere qui un altro esempio per maggiore esercizio dei giovani. Propongansi a sommare fra loro le quantità polinomie $4a+3bc+$ $+7cd-8x$, $2bc+cc-9cd+2k+12x$, $5a-4cc+2cd-k-4y$, $2bc-11cd+14k+7y$, disponendole come qui segue

$$\begin{array}{l} 4a+3bc \qquad +7cd \qquad -8x \\ \quad 2bc+cc-9cd+2k+12x \\ 5a \qquad -4cc+2cd-k \qquad -4y \\ \quad 2bc \qquad -11cd+14k \qquad +7y \\ \hline \end{array}$$

si giugnerà alla lor somma $= 9a+7bc-3cc-11cd+15k+4x+3y$

83. Allorchè da a si sottrae b il residuo sarà $a-b$ (79). Suppongasi ora che da a si voglia sottrarre non b, ma $b-c$ che è minore di b per quanto vale c, il nuovo residuo dovrà certamente essere maggiore del primo residuo $a-b$ per quanto è grande la quantità c; sarà cioè $a-b+c$ il residuo della sottrazione di $b-c$ da a. Dippiù se a volesse diminuirsi non di $b-c$, ma di $b-c+d$ maggiore di $b-c$ per quanto vale d, per quanto vale d dovrà questo terzo residuo essere minore del secondo $a-b+c$; sarà dunque $a-b+c-d$ il residuo della sottrazione di $b-c+d$ dalla quantità a. In generale potrà stabilirsi la seguente proposizione. *Per sottrarre da una data quantità un polinomio qualunque, farà d' uopo mutare prima a questo tutti i suoi segni, e quindi sommarlo con la quantità proposta.* Se per esempio dalla quantità $aa+4ab-3bb-hk$ dovesse sottrarsi l' altra $2aa-ab-3bb+h-k$, mutando tutti i segni a questa ultima, essa diventerebbe $-2aa+ab+3bb-h+k$ che aggiunta alla precedente, come quì segue

$$\begin{array}{l} \quad aa+4ab-3bb-hk \\ -2aa+ab+3bb \qquad -h+k \\ \hline -aa+5ab \qquad -hk-h+k \end{array}$$

la somma $-aa+5ab-hk-h+k$ somministrerebbe il cercato residuo.

Per un secondo esempio sieno da sottrarsi insieme i due polinomii $2abb+$ $+5bcc-5ny$, $-7abb+9bcc-mx+q$ dal seguente altro $5abb+15bcc+$ $+4mx+ny$; operando come quì si vede

$$\begin{array}{l} \quad 5abb+15bcc+4mx+ny \\ -2abb-5bcc \qquad +5ny \\ +7abb-9bcc+mx \qquad -q \\ \hline \quad 10abb+bcc+5mx+6ny-q \end{array}$$

si otterrà $10abb+bcc+5mx+6ny-q$ pel domandato residuo.

84. Volendo moltiplicare a per c si otterrà il prodotto ac (80).

Quindi 1.° se per c faccia d' uopo moltiplicare $a+b$, il prodotto sarà $ac+bc$. Infatti moltiplicare $a+b$ per c significa ripetere $a+b$ per un numero di volte uguale a c. Ma l' istesso è ripetere $a+b$ per un numero c di volte, che ripetere c volte ciascuna delle parti di $a+b$ e prendere dopo la somma dei risultamenti. Adunque $ac+bc$ sarà il prodotto di $a+b$ per c.

2.° Se per $c+d$ debbasi moltiplicare $a+b$, il prodotto sarà $ac+bc+$ $+ad+bd$. Perocchè il risultamento medesimo si otterrà ripetendo $a+b$ per un numero di volte uguale a $c+d$, che si otterrebbe ripetendo $a+b$ prima per c volte, poi per d volte, e dopo questo aggiugnendo fra loro i due prodotti par-

ziali $ac+bc$, $ad+bd$ (1.°). Ma la somma di questi prodotti (82) agguaglia $ac+bc+ad+bd$. Dunque ec.

3.° Se si proponga a moltiplicare $a-b$ per c, il prodotto sarà $ac-bc$. Per verità se ac esprime il prodotto di a per c, il prodotto di un numero minore di a della quantità b, il prodotto cioè di $a-b$ pel numero c dovrà essere espresso per una quantità minore di ac per quanto vale b ripetuto c volte, ossia per quanto vale il prodotto bc. Sarà dunque $ac-bc$ il prodotto di $a-b$ per c.

4.° Cercandosi da ultimo di moltiplicare $a-b$ per $c-d$, si giugnerà ad ottenere il prodotto $ac-bc-ad+bd$. Infatti moltiplicando $a-b$ per c solamente si ottiene (3.°) $ac-bc$, il qual prodotto sarà maggiore di quello che si domanda per quanto vale l'altro $ad-bd$ che si ha moltiplicando $a-b$ per d; poichè non si cerca quì il prodotto di $a-b$ per c solamente, ma per c diminuito di d. Adunque il residuo della sottrazione del prodotto $ad-bd$ dall'altro $ac-bc$ sarà il giusto prodotto di $a-b$ per $c-d$. Ma (83) questo residuo è $ac-bc-$ $-ad+bd$. Dunque ec.

85. Dal detto finora senza la menoma difficoltà si dedurranno le seguenti proposizioni intorno alla moltiplicazione dei numeri positivi e negativi.

1.ª *È sempre positivo il prodotto che si ottiene moltiplicando un numero positivo per un altro anch' esso positivo.*

2.ª *È sempre negativo il prodotto che si ha moltiplicando un numero positivo per un numero negativo.*

3.ª *È altresì negativo il prodotto che si ha moltiplicando un numero negativo per un numero positivo.*

4.ª *È finalmente positivo il prodotto di due numeri che sieno affetti ambedue dal segno negativo* (*).

86. In virtù di queste proposizioni, e da tutto quanto è stato detto nel numero 84 di leggieri rilevasi il metodo, che si vuol tenere nel moltiplicare fra loro le quantità complesse, lo che di vantaggio verrà compreso nella seguente proposizione. *Per eseguire la moltiplicazione dei polinomii farà mestieri moltiplicare ciascun termine del moltiplicatore per tutti i termini del moltiplicando, avvertendo di prefigere a ciascun prodotto di un termine per l' altro il segno + ovvero il segno — secondo che questi termini sono affetti dal medesimo segno ovvero da segni diversi. Si otterranno in siffatta guisa tanti prodotti parziali quanti sono i termini del moltiplicatore; presa quindi la somma di questi prodotti si otterrà il prodotto totale cercato.* Per darne un esempio sia da moltiplicarsi il polinomio $2a+4b-2c$ per l'altro $a+3b-c$;

(*) Supponendo la prima di queste quattro proposizioni abbastanza evidente per se medesima, ecco in qual modo alcuni autori dimostrano le altre tre. Volendosi moltiplicare $a-a$ per b, il prodotto dovrà essere uguale a zero, essendo zero il moltiplicando; ma col moltiplicare il primo termine a del moltiplicando per b si ha ab; dunque col moltiplicare l'altro termine $-a$ per b si dovrà necessariamente conseguire $-ab$, altrimenti non potrebbe essere zero il prodotto di $a-a$ per b.

Similmente se vogliasi a moltiplicare per $b-b$, il prodotto dovrà essere $ab-ab$. Perocchè essendo zero il moltiplicatore, tale eziandio dovrà essere il prodotto. Ma a moltiplicato per b dà ab. Adunque a moltiplicato per $-b$ farà d' uopo che sia uguale a $-ab$.

Per ultimo sia da moltiplicarsi $b-b$ per $-a$. Moltiplicando per $-a$ il primo termine b, si otterrà $-ab$. Adunque ab sarà il prodotto di $-b$ per $-a$, dovendo il prodotto totale riuscire uguale a zero, come è zero il moltiplicando.

*

scrivendo questo sotto il primo la operazione si eseguirà come quì si scorge

$$
\begin{array}{lllll}
\text{moltiplicando..} & 2a+4b-2c & & & \\
\text{moltiplicatore..} & a+3b-c & & & \\
\hline
 & 2aa+4ab-2ac & & & \\
 & \quad +6ab & +12bb & -6bc & \\
 & \qquad -2ac & & -4bc & +2cc \\
\hline
\text{prodotto totale cercato..} & 2aa+10ab-4ac & +12bb & -10bc & +2cc
\end{array}
$$

Soggingnerò qui alcuni altri esempii per esercizio.

$$
\begin{array}{l}
a+b \\
a-b \\
\hline
aa+ab \\
\quad -ab-bb \\
\hline
aa \quad -bb
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
a+b \\
a+b \\
\hline
aa+ab \\
\quad +ab+bb \\
\hline
aa+2ab+bb
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
aa+2ab+bb \\
a+b \\
\hline
aaa+2aab+abb \\
\quad +aab+2abb+bbb \\
\hline
aaa+3aab+3abb+bbb
\end{array}
$$

Accade soventi volte che la moltiplicazione di due o di più quantità complesse non debba eseguirsi ma sibbene accennarsi soltanto. In siffatte circostanze sogliono gli analisti dei diversi fattori ciascuno racchiudere tra due parentesi. Così la formola $(2a+3b-c)(5a-6b+c)$ indica il prodotto delle due quantità complesse $2a+3b-c$, $5a-6b+c$, e $(5aa-3ab+bb)(4abb-acc+dd)(bb-cc)$ rappresenta quello delle tre $5aa-3ab+bb$, $4abb-acc+dd$, $bb-cc$.

87. Nella divisione deve il prodotto del quoziente e del divisore uguagliare il dividendo. Quindi per la divisione dei numeri, in quanto questi si considerano positivi e negativi, si ottengono le seguenti formole (81 . 85)

$$\frac{ab}{a}=b,\ \frac{-ab}{a}=-b,\ \frac{ab}{-a}=-b,\ \frac{-ab}{-a}=b.$$

Donde conseguita la proposizione. *Il quoziente della divisione di un numero per un altro è positivo, se ambedue i numeri sono affetti dal medesimo segno; che se poi due numeri sono affetti da segni diversi, il quoziente della divisione dell' uno per l' altro sarà sempre negativo.* Hanno dunque luogo nella divisione dei numeri positivi e negativi quelle medesime regole che si vogliono osservare nel moltiplicarli fra loro.

Sarà facile ora il dividere una data quantità complessa per un dato monomio qualunque. Propongasi per esempio a dividere il polinomio $4aabbb+$ $+6aabb-4abc$ pel monomio $-2ab$, il quoziente si otterrà dividendo ciascun termine del polinomio per $-2ab$; sarà quindi (81)

$$\frac{4aabbb+6aabb-4abc}{-2ab}=-2abb-3ab+2c.$$

88. Allora dicesi un polinomio essere *ordinato* per qualche lettera quando

nel suo primo termine contengasi quella lettera il più delle volte, e negli altri gradatamente meno. A questo modo il polinomio

$$aaa + aab + abb + bbb$$

è ordinato per a, e sarebbe ordinato per b ove scrivessesi nella maniera seguente

$$bbb + abb + aab + aaa.$$

Che se più termini contengono la medesima lettera un ugual numero di volte, dovranno considerarsi come un solo. Infatti il polinomio per esempio

$$aaab - aaac + aabb - aacc + abbb - accc$$

riducesi (86) a

$$aaa(b-c) + aa(bb-cc) + a(bbb-ccc).$$

89. *Ove propongasi a dividere un polinomio per un altro, prima si ordineranno ambedue per una medesima lettera, quindi si dividerà il primo termine del dividendo pel primo termine del divisore, ed il quoto si noterà come nell'Aritmetica (36); pel quoto stesso si moltiplicherà tutto il divisore, ed il prodotto si toglierà da tutto il dividendo, e notato il residuo, il suo primo termine si dividerà pel primo termine del divisore, ripetendosi la operazione medesima con l'ordine stesso fino alla fine.* Eccone un esempio

$$\begin{array}{l|l|l} \text{divisore} & \text{dividendo} & \text{quoziente} \\ a-b & aaa - 3aab + 3abb - bbb & aa - 2ab + bb \\ & aaa - aab & \\ \hline & -2aab + 3abb - bbb & \\ & -2aab + 2abb & \\ \hline & abb - bbb & \\ & abb - bbb & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

Poichè il primo termine aaa del dividendo diviso pel primo termine a del divisore dà per quoto aa, ove aa fosse l'intero quoto cercato, dovrebbe il prodotto $aa(a-b)$ uguagliare il dividendo: or $aa(a-b)=aaa-aab$: non è dunque aa l'intero quoto che si domanda. Sottraendo pertanto $aaa-aab$ da tutto il dividendo si otterrà per residuo $-2aab+3abb-bbb$. Dividendo ora il primo termine $-2aab$ di questo residuo pel primo termine a del divisore conseguiremo $-2ab$ pel secondo termine del domandato quoziente, il qual secondo termine sarebbe altresì l'ultimo, ove $-2ab$ fosse l'esatto quoto del residuo $-2aab+3abb-bbb$ pel divisore proposto $a-b$, ove cioè il prodotto $-2ab(a-b)$ fosse uguale a $-2aab+3abb-bbb$: ma $-2ab(a-b)$ uguaglia $-2aab+2abb$. Non è dunque $-2ab$ l'esatto quoziente della divisione di $-2aab+3abb-bbb$ per $a-b$; e quindi deducesi che il quoziente richiesto oltre ai termini aa e $-2ab$ dovrà contenerne qualche altro. Togliendo ora $-2aab+2abb$ da $-2aab+3abb-bbb$ si

otterrà un secondo residuo $abb-bbb$ di cui il primo termine diviso per a darà per quoto bb. Or $bb(a-b)=abb-bbb$; sarà quindi zero il terzo residuo, e conseguentemente bb è quoto esatto della divisione di $abb-bbb$ per $a-b$; donde il quoziente della divisione di $aaa-3aab+3abb-bbb$ per $a-b$ è $aa-2ab+bb$. Che però

$$\frac{aaa-3aab+3abb-bbb}{a-b}=aa-2ab+bb.$$

90. Nella guisa medesima si dimostreranno le formole

$$\frac{hhh+kkk}{h+k}=hh-hk+kk\,,$$

$$\frac{6eeff+5efgh-efkl-21gghh+13ghkl-2kkll}{2ef-3gh+kl}=3ef+7gh-2kl\,,$$

delle quali la prima si ottiene con la seguente operazione

$$\begin{array}{l|l|l}
h+k & hhh+kkk & hh-hk+kk \\
 & hhh+hhk & \\
 & \quad -hhk+kkk & \\
 & \quad -hhk-hkk & \\
 & \qquad\quad hkk+kkk & \\
 & \qquad\quad hkk+kkk & \\
 & \qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

e l'altra ricavasi nel modo che qui si scorge

$$\begin{array}{l|l|l}
2ef-3gh+kl & 6eeff+5efgh-efkl-21gghh+13ghkl-2kkll & 3ef+7gh-2kl \\
 & 6eeff-9efgh+3efkl & \\
 & \quad 14efgh-4efkl-21gghh+13ghkl-2kkll & \\
 & \quad 14efgh \qquad\quad -21gghh+7ghkl & \\
 & \qquad -4efkl \qquad\quad +6ghkl-2kkll & \\
 & \qquad -4efkl \qquad\quad +6ghkl-2kkll & \\
 & \qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

91. Come nell'Aritmetica (35) così nell'Algebra avviene sovente che una quantità non possa esattamente dividersi per un'altra, lo che ha luogo quante volte compiuta la divisione si ha un resto; pertanto farà mestieri in tal caso conseguentemente a quanto si disse nel citato numero apporre nel quoziente una frazione avente per numeratore il resto e per denominatore il divisore. Così per esempio si troverà

$$\frac{aa+bb}{a+b}=a-b+\frac{2bb}{a+b},$$

come ancora

$$\frac{hhh+3hhk+3hkk+2kkk}{h+k}=hh+2hk+kk+\frac{kkk}{h+k},$$

E qui cade opportuno il riflettere che siccome nella divisione esatta moltiplicando il quoziente pel divisore si ha un prodotto uguale al dividendo, così quante volte non riesce esatta la divisione, sarà il prodotto del quoziente pel divisore insieme col residuo uguale al dividendo.

Suppongasi ad esempio che dividendo M per N si ottenga un quoto Q ed un residuo R, sarà

$$\frac{M}{N}=Q+\frac{R}{N},\text{ e quindi } M=QN+R.$$

CAPO II.

DELLE FRAZIONI.

92. Allorchè la divisione delle quantità algebriche non può esattamente eseguirsi, si dà luogo ad una frazione algebrica col semplicemente accennarne la operazione. In siffatta guisa non potendosi esattamente effettuare la divisione di a per b, di $aa+bb$ per $a+b$, di $aa-cc$ per $aa+bb$, di $bbb-abb$ per $aa+bb$, ec. le formole

$$\frac{a}{b},\ \frac{aa+bb}{a+b},\ \frac{aa-cc}{aa+bb},\ \frac{bbb-abb}{aa+bb},\text{ ec.}$$

rappresenteranno frazioni algebriche.

Dinotando adunque ogni frazione il quoziente della divisione del numeratore pel denominatore, conformemente a quanto fu detto nell'Aritmetica (38.39.40), con molta agevolezza si comprenderà 1.° che moltiplicandosi o dividendosi il numeratore di una frazione algebrica per una data quantità, verrà a moltiplicarsi o dividersi per la quantità stessa tutta la frazione: 2.° che moltiplicandosi o dividendosi per una quantità data il denominatore di una frazione, resterà questa divisa o moltiplicata per la medesima quantità: 3.° che moltiplicandosi e dividendosi al tempo stesso ambedue i termini di una frazione qualunque, per esempio $\frac{a}{b}$, per una stessa quantità k, per niente si muterà il valore della frazione medesima; sarà perciò

$$\frac{a}{b}=\frac{ak}{bk}=\frac{a:k}{b:k}.$$

93. Quantunque volte entrambi i termini di una data frazione contengano un fattore comune, tornerà meglio per lo più il togliere questo fattore comune

mediante la divisione, perchè così la frazione senza mutare il valore addivenga più semplice. Le frazioni per esempio

$$\frac{aa+ab}{ab+bb},\ \frac{aa-bb}{ab-bb}$$

sono riducibili ad espressioni più semplici, poichè ambedue i termini della prima contengono il fattore $a+b$, ed entrambi quelli della seconda il fattore $a-b$, per cui, senza alterarne il valore, la prima potrà segnarsi con $\frac{a}{b}$, e la seconda con $\frac{a+b}{b}$. Ad ottenere pertanto la più semplice espressione che possa prendere una frazione dovrà cercarsi il massimo comune divisore del numeratore e del denominatore. Trovasi in generale il massimo comun divisore di due numeri col metodo seguente.

Sieno i due numeri N ed N' di cui il minore sia N'. Dividendo N per N', dicasi Q il quoziente ed R il residuo; dividendo poi il numero N' pel residuo R, chiamisi Q' il quoziente ed R' il residuo; pel residuo R' dividendo R, sia Q'' il quoziente ed R'' il residuo; per R'' dividendo R', si abbia per quoziente Q''' e per residuo R'''; e così appresso. Otterremo (91) le uguaglianze seguenti

$$\begin{aligned}
N &= N'Q + R,\\
N' &= RQ' + R',\\
R &= R'Q'' + R'',\\
R' &= R''Q''' + R''',\\
R'' &= R'''Q^{iv} + R^{iv},\\
&\text{ec.} \ldots\ldots
\end{aligned}$$

Suppongasi $R^{iv}=0$, R''' dividerà esattamente R''; ma se R''' divide esattamente R'', dividerà pure $R''Q'''+R'''$, ossia R', esattamente; e quindi ancora $R'Q''+R''$, ovvero R, sarà divisibile esattamente per R'''; e conseguentemente $RQ'+R'$, cioè N', si dividerà altresì per R''' esattamente; e infine anche $N'Q+R$, che pareggia N, potrà per R''' dividersi esattamente. Adunque il residuo R''' sarà nel caso di $R^{iv}=0$ un esatto divisore comune ai due numeri N ed N'.

Dimostro ora che R''' è il massimo di tutti gli esatti divisori comuni ad N ed N'. Suppongasi infatti che K sia un esatto divisore comune ad N ed N', ed insieme maggiore di R'''. Poichè dunque K esattamente divide N ed N', sarà $\frac{N}{K}-\frac{N'Q}{K}$ un numero intero (*): ma $\frac{N}{K}-\frac{N'Q}{K}=\frac{R}{K}$ (**), quindi $\frac{R}{K}$ sarà pure un numero intero, cioè K sarà altresì divisore esatto di R.

(*) Essendo N ed N' per supposizione divisibili esattamente per K, ponendo $\frac{N}{K}=a$ ed $\frac{N'}{K}=b$, saranno a e b numeri interi, e la quantità $\frac{N}{K}-\frac{N'Q}{K}$ diventerà $a-bQ$, che per essere Q numero intero, evidentemente dovrà essere una quantità intera.

(**) Abbiamo $N=N'Q+R$, dividendo N ed $N'Q+R$ per K, saranno ancora uguali fra loro i quozienti $\frac{N}{K}$ ed $\frac{N'Q}{K}+\frac{R}{K}$; togliendo da ambedue la quantità $\frac{N'Q}{K}$, risulteranno altresì uguali fra loro i residui $\frac{N}{K}-\frac{N'Q}{K}$ ed $\frac{R}{K}$, sarà cioè $\frac{N}{K}-\frac{N'Q}{K}=\frac{R}{K}$.

Ora essendo K divisore esatto comune ad N' ed R sarà $\frac{N'}{K} - \frac{RQ'}{K} = \frac{R'}{K}$ una quantità intera, e però R' ancora rimarrà diviso esattamente per K. Se eziandio R' è divisibile esattamente per K, la quantità $\frac{R}{K} - \frac{R'Q''}{K} = \frac{R''}{K}$ è intera, cioè R'' resta pure esattamente diviso per K. Donde finalmente consegnita che la quantità $\frac{R'}{K} - \frac{R''Q'''}{K} = \frac{R'''}{K}$ sarà intera, e quindi il numero maggiore K esattamente dividerà il minore R''': lo che è assurdo, e quindi non potrà esservi, nel caso di $R^{IV} = o$ un altro divisore esatto comune ad N ed N' maggiore di R'''. Col medesimo discorso si dimostrerà che R'' è il massimo comun divisore di N ed N' nella ipotesi di $R'''=o$; come ancora che R' nella supposizione di $R''=o$, è il massimo comun divisore di N ed N'; ec. *In generale adunque si troverà il massimo comun divisore di due numeri dividendo primieramente il numero maggiore pel numero minore, poi pel residuo di questa prima divisione dividendo il numero minore, quindi pel residuo della seconda divisione dividendo quello della prima, come ancora pel residuo della terza divisione dividendo il residuo della seconda, e così di seguito continuando sempre a dividere il residuo di ciascuna divisione per quello della seguente, finchè si pervenga ad un esatto quoziente; l' ultimo divisore sarà il massimo comun divisore cercato.*

94. Si voglia per esempio trovare il massimo comun divisore dei numeri 189, e 147. Effettuando la divisione continuamente come segue

```
147 | 189 | 1
      147
      ---
       42 | 147 | 3
            126
            ---
             21 | 42 | 2
                  42
                  --
                   0
```

sarà 21 il massimo comun divisore cercato. Il massimo comun divisore di 9024 e 3760 sarà 752. Infatti

```
3760 | 9024 | 2
       7520
       ----
       1504 | 3760 | 2
              3008
              ----
               752 | 1504 | 2
                     1504
                     ----
                        0
```

Da ultimo si troverà il massimo comun divisore dei numeri 63570 e 2910 uguale a 30. Poichè

2910 | 63570 | 21
5820
——
5370
2910
——
2460 | 2910 | 1
2460
——
450 | 2460 | 5
2250
——
210 | 450 | 2
420
——
30 | 210 | 7
210
——
0

95. Ove dunque si abbiano le frazioni $\frac{147}{189}$, $\frac{3760}{9024}$, $\frac{2910}{63570}$, potranno esse *ridursi a minimi termini* dividendo i termini della prima per 21, quei della seconda per 752, ed i termini della terza per 30. Operando in siffatta guisa otterremo

$$\frac{147}{189}=\frac{7}{9},\ \frac{3760}{9024}=\frac{5}{12},\ \frac{2910}{63570}=\frac{97}{2119}.$$

Se la frazione non è riducibile a minimi termini si troverà il massimo comun divisore del numeratore e del denominatore uguale alla unità. Così volendo ridurre a minimi termini la frazione $\frac{15}{154}$ cercheremo prima il massimo comun divisore di 154 e 15 nel modo che qui si scorge

15 | 154 | 10
15
——
4 | 15 | 3
12
——
3 | 4 | 1
3
——
1 | 3 | 3
3
——
0

I numeri cioè 154 e 15 non hanno altro divisore comune fuorchè la unità; onde sarà irriducibile la proposta frazione $\frac{15}{154}$.

96. Nella ricerca del massimo comun divisore di due quantità algebriche s'incontrano spesso spesso delle difficoltà che non hanno luogo giammai operando su i numeri. Che però farà d'uopo avvertire di non farsi mai a cercare il massimo comun divisore di due quantità algebriche, allorchè queste non hanno delle lettere comuni; e posto che le abbiano, di non mai imprendere la operazione prima che si sieno le proposte quantità ordinate ambedue rispetto alla medesima lettera, e presa per dividendo quella in cui la stessa lettera ritrovasi più volte moltiplicata per se medesima.

Inoltre gioverà sempre preparare i primi termini di ogni dividendo e del corrispondente divisore in guisa che possa l'uno per l'altro senza frazione alcuna esattamente dividersi. Per lo che si noti che non verrà in alcun modo ad alterarsi un fattore comune a due quantità ogni volta che l'una si moltiplichi, o si divida per qualche quantità che nell'altra non si ritrova come fattore. Si debba per esempio trovare il massimo comun divisore delle due quantità

$$3aaa-3aab+abb-bbb\,,$$
$$4aab-5abb+bbb.$$

Dal detto la prima dovrà riguardarsi come dividendo, e la seconda come divisore. Or il primo termine $4aab$ del divisore non può dividere senza frazione il primo termine $3aaa$ del dividendo a cagione dei fattori 4 e b dell'uno che non si trovano nell'altro. Non però riflettendo che b è fattore comune a tutti i termini del divisore senza esserlo a tutti quelli del dividendo, si vedrà chiaro che senza punto alterare il divisore comune che cercasi potrà dividersi

$$4aab-5abb+bbb$$

per b, in modo che si abbia

$$4aa-5ab+bb.$$

Infatti ogni divisore comune a due quantità dovrà necessariamente comporsi di fattori comuni all'una ed all'altra: se dunque esiste un divisore comune fra le due quantità proposte, non potrà esso contenere b come fattore, e quindi mediante la divisione togliendo il fattore b dai singoli termini di

$$4aab-5abb+bbb$$

in niun modo si altererà il cercato comun divisore. Per la ragione medesima per cui si può dalla seconda delle proposte quantità togliere un fattore che non si contiene nella prima, potrà eziandio introdursi in questa un fattore che non si contenga nella seconda. Che però si moltiplichi $3aaa-3aab+abb-bbb$ per 4, si otterrà

$$12aaa-12aab+4abb-4bbb.$$

Adunque il massimo comun divisore delle quantità date sarà lo stesso che quello delle seguenti

$$12aaa-12aab+4abb-4bbb$$
$$4aa-5ab+bb,$$

in cui per altro la divisione del primo termine dell'una pel primo termine dell'altra si effettua esattamente.

Pertanto il quoziente di siffatta divisione essendo $3a$, il residuo della sottrazione di tutto il divisore moltiplicato pel quoziente $3a$, da tutto il dividendo sarà

$$3aab+abb-4bbb,$$

quantità, con cui (93) dovrà

$$4aa-5ab+bb$$

avere lo stesso massimo comun divisore, che questa ha con l'altra

$$12aaa-12aab+4abb-4bbb.$$

Sopprimendo quindi, giusta le osservazioni fatte quì sopra, nell'ottenuto residuo il fattore b comune a tutti i suoi termini, e moltiplicandolo poi per 4, si avrà a dividere la quantità

$$12aa+4ab-16bb$$

per l'altra

$$4aa-5ab+bb.$$

Or la divisione del primo termine del dividendo per il primo termine del divisore, dà per quoziente 3, moltiplicando poi per tutto il divisore il quoziente 3 ed insieme sottraendo il prodotto dal dividendo si ottiene per residuo

$$19ab-19bb;$$

la questione adunque riducesi a trovare il massimo comun divisore tra la quantità

$$19ab-19bb$$

e l'altra

$$4aa-5ab+bb,$$

considerando questa come dividendo e la prima come divisore. Pria però d'imprendere la operazione si dividerà il divisore pel fattore $19b$ comune a tutti i suoi termini e non a quelli del dividendo, e sarà

$$4aa-5ab+bb$$

il dividendo, e

$$a-b$$

il divisore. Or siccome questa divisione riesce esattamente, il massimo comun divisore richiesto è senza dubbio $a-b$. Dividendo quindi per $a-b$ le due quantità proposte

$$3aaa-3aab+abb-bbb,$$
$$4aab-5abb+bbb,$$

si vedrà che esse potranno decomporsi come segue

$$(3aa+bb)\,(a-b)\,,$$
$$(4ab-bb)\,(a-b)\,,$$

donde

$$\frac{3aaa-3aab+abb-bbb}{4aab-5abb+bbb}=\frac{3aa+bb}{4ab-bb}\,.$$

Soggiungo qui come in un quadro la intera operazione che finora abbiamo descritta.

$$(4aab-5abb+bbb):b \mid 4\,(3aaa-3aab+abb-bbb)$$
$$4aa-5ab+bb \mid 12aaa-12aab+4abb-4bbb \mid 3a$$
$$12aaa-15aab+3abb$$
$$4\,(3aab+abb-4bbb):b$$
$$12aa+4ab-16bb \mid 3$$
$$12aa-15ab+3bb$$
$$(19ab-19bb):19b$$
$$a-b \mid 4aa-5ab+bb \mid 4a-b$$
$$4aa-4ab$$
$$-ab+bb$$
$$-ab+bb$$
$$0$$

97. Riuscirà di non picciol vantaggio ai giovani allievi l'esercitarsi con gli esempii che seguono. Si trova nel primo il massimo divisore $a-3b$ comune alle due quantità $3aa-4aab-9abb-18bbb$, $5aa-18ab+9bb$, e nel secondo il massimo divisore $z+3$ comune alle altre due $zzz+4zz+z-6$, $5zz+9z-18$.

$$5aa-18ab+9bb \mid 5(3aaa-4aab-9abb-18bbb)$$

$$15aaa-20aab-45abb-90bbb \mid 3a$$
$$15aaa-54aab+27abb$$

$$5(34aab-72abb-90bbb)$$

$$170aab-360abb-450bbb \mid 34b$$
$$170aab-612abb+306bbb$$

$$(252abb-756bbb):252bb$$

$$a-3b \mid 5aa-18ab+9bb \mid 5a-3b$$
$$5aa-15ab$$

$$-3ab+9bb$$
$$-3ab+9bb$$

$$0$$

$$5zz+9z-18 \mid 5(zzz+4zz+z-6)$$

$$5zzz+20zz+5z-30 \mid z$$
$$5zzz+9zz-18z$$

$$5(11zz+23z-30)$$

$$55zz+115z-150 \mid 11$$
$$55zz+99z-198$$

$$(16z+48):16$$

$$z+3 \mid 5zz+9z-18 \mid 5z-6$$
$$5zz+15z$$

$$-6z-18$$
$$-6z-18$$

$$0$$

Potremo quindi agevolmente dedurne

$$\frac{3aaa-4aab-9abb-18bbb}{5aa-18ab+9bb}=\frac{3aa+5ab+6bb}{5a-3b}.$$

$$\frac{zzz+4zz+z-6}{5zz+9z-18}=\frac{zz+z-2}{5z-6}.$$

Ponendo fine alla precedente teoria intorno al massimo comun divisore, che per ragion di brevità non ho voluto più diffusamente trattare, mi piace, per quei che volessero profittarne, indicare l'accortissima e più minuta spiegazione in tal proposito addotta dal Lacroix nella sua Algebra e saggiamente dilucidata con opportune annotazioni per opera del chiarissimo nostro concittadino Signor Professore De Angelis: v. la edizione eseguita in Napoli nel 1835 della traduzione dell'Algebra di Lacroix fatta dallo stesso De Angelis.

98. La riduzione delle frazioni algebriche al medesimo denominatore dietro ciò che fu detto nell'Aritmetica (47) non ha difficoltà. Infatti le frazioni $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ sono rispettivamente uguali (92) alle altre $\frac{ad}{bd}$, $\frac{bc}{bd}$, le quali hanno il medesimo denominatore; come ancora le frazioni

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}, \frac{g}{h}$$

si ridurranno ad avere lo stesso denominatore facendo lor prendere rispettivamente la forma

$$\frac{adfh}{bdfh}, \frac{bcfh}{bdfh}, \frac{bdeh}{bdfh}, \frac{bdfg}{bdfh}.$$

Nel ridurre però le frazioni allo stesso denominatore si possono in certi casi ottenere dei risultamenti più semplici di quelli che si ottengono col mettere in pratica la regola generale enunciata nel citato numero 47. Ci servano di esempio le frazioni

$$\frac{a}{bbc}, \frac{de}{bcf}, \frac{hg}{bfk}.$$

È chiaro che i tre denominatori diventerebbero uguali ove si moltiplicasse il primo per fk, il secondo per bk, ed il terzo per bc. Per ridurre adunque le proposte frazioni alla medesima denominazione basterà moltiplicare i termini della prima per fk, quelli della seconda per bk, ed i termini della terza per bc. Si otterranno così

$$\frac{afk}{bbcfk}, \frac{bdek}{bbcfk}, \frac{bchg}{bbcfk},$$

molto più semplici delle seguenti

$$\frac{abbcffk}{bbbbccffk}, \frac{bbbcdefk}{bbbbccffk}, \frac{bbbccfhg}{bbbbccffk},$$

che sarebbero risultate dal moltiplicare i termini di ciascuna pel prodotto dei denominatori delle altre.

99. Ella è cosa chiara, e segue dalla natura stessa della divisione, che il quoziente della somma $a+b$ o della differenza $a-b$ divisa per c, equivalga alla somma ovvero alla differenza dei due quozienti che si ottengono dividendo prima

a per c, e poi b per c; si avranno quindi

$$\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\,,\quad \frac{a-b}{c}=\frac{a}{c}-\frac{b}{c}\,.$$

Per la ragione medesima dovranno aver luogo le uguaglianze che seguono

$$\frac{a+b+c}{d}=\frac{a}{d}+\frac{b}{d}+\frac{c}{d}\,,\quad \frac{a-b-c}{d}=\frac{a}{d}-\frac{b}{d}-\frac{c}{d}\,,\ \text{ec...}$$

Donde rilevasi il metodo del quale si dovrà far uso nell' aggiugnere insieme, o nel sottrarre le une dalle altre più frazioni che hanno il medesimo denominatore: egli è quello stesso metodo che si praticò nell' Aritmetica (48. 50). Ove poi le frazioni di cui si vuole la somma ovvero la differenza non godano del medesimo denominatore farà mestieri ridurle anzi ogni altra operazione ad avere la stessa denominazione. Con siffatta avvertenza si otterranno facilmente la somma e la differenza delle due frazioni $\frac{a}{a+b}$, $\frac{c}{c+d}$. Infatti

$$\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+d}=\frac{a(c+d)}{(a+b)(c+d)}+\frac{c(a+b)}{(a+b)(c+d)}=\frac{2ac+ad+bc}{ac+ad+bc+bd}\,,$$

$$\frac{a}{a+b}-\frac{c}{c+d}=\frac{a(c+d)}{(a+b)(c+d)}-\frac{c(a+b)}{(a+b)(c+d)}=\frac{ad-bc}{ac+ad+bc+bd}\,.$$

Essendo inoltre (81) $a=\frac{ac}{c}$, sarà

$$a+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c}\,,\ \text{ed}\ a-\frac{b}{c}=\frac{ac-b}{c}\,,$$

e vicendevolmente

$$\frac{ac+b}{c}=a+\frac{b}{c}\,,\ \text{ed}\ \frac{ac-b}{c}=a-\frac{b}{c}\,.$$

100. Vogliasi moltiplicare un numero qualunque A per la frazione $\frac{m}{n}$; si dovrà sottoporre A a quella stessa operazione alla quale si sottopone la unità perchè si abbia $\frac{m}{n}$ (19). Ma perchè si ottenga $\frac{m}{n}$ si assoggetta la unità ad essere divisa in n parti fra loro uguali, di cui se ne prende un numero uguale ad m. Si moltiplicherà dunque A per $\frac{m}{n}$ dividendo prima A per n e poi moltiplicandone il quoto per m. Sarà cioè (81. 92)

$$A\times\frac{m}{n}=\frac{mA}{n}\,.$$

Pongasi ora $A=\frac{a}{b}$, si avrà

$$\frac{a}{b}\times\frac{m}{n}=\left(\frac{a}{b}:n\right)m=\left(\frac{a}{bn}\right)m=\frac{am}{bn}.$$

Segue da ciò che il prodotto della moltiplicazione di un numero, sia intero sia fratto, per una qualunque frazione si otterrà come nell' Aritmetica (51. 52). Sia per ragione di esempio da moltiplicarsi la frazione $\frac{aa+bb}{c+d}$ per l'altra $\frac{a-b}{c-d}$; il prodotto sarà

$$\frac{aa+bb}{c+d}\times\frac{a-b}{c-d}=\frac{aaa+abb-aab-bbb}{cc-dd}.$$

101. Onde dividere il numero A per la frazione $\frac{m}{n}$, farà d' uopo cercare un tal numero Q, che moltiplicato per $\frac{m}{n}$ ci dia il prodotto $=A$ (27). Dovrà perciò essere (100) $A=\frac{mQ}{n}$. Or se A uguaglia $\frac{mQ}{n}$, sarà la m^{sima} parte di A uguale alla m^{sima} parte di $\frac{mQ}{n}$, sarà cioè $\frac{A}{m}=\frac{Q}{n}$; ed essendo la parte m^{sima} di A uguale alla n^{sima} parte di Q, si otterrà Q moltiplicando $\frac{A}{m}$ per n, sarà quindi $Q=\frac{nA}{m}$. Donde

$$A:\frac{m}{n}=\frac{nA}{m}.$$

Suppongasi $A=\frac{a}{b}$, avremo

$$\frac{a}{b}:\frac{m}{n}=\frac{a}{b}\times\frac{n}{m}=\frac{an}{bm}.$$

Il quoziente adunque della divisione di un qualunque numero, o intero o fratto, per un qualsivoglia altro numero fratto si otterrà secondo la regola addotta nell' Aritmetica (54). Debbasi per esempio dividere $\frac{aa+bb}{c+d}$ per $\frac{a-b}{c-d}$, si avrà

$$\frac{aa+bb}{c+d}:\frac{a-b}{c-d}=\frac{(aa+bb)(c-d)}{(c+d)(a-b)}=\frac{aac+bbc-aad-bbd}{ac+ad-bc-bd}.$$

CAPO III.

DELLE POTENZE E DELLE RADICI DEI MONOMII.

102. Supposto m numero intero, innalzare la quantità a alla *potenza* del grado m, significa formare un prodotto di tanti fattori ciascuno $=a$, quante sono le unità in m: a dicesi *radice*, m *esponente* ovvero *indice*, e la potenza medesima si esprime per a^m. Adunque la prima potenza della quantità a, sarà a^1, la seconda potenza a^2, la terza a^3, la quarta a^4, ec. essendo

$$a^1=a,\ a^2=aa,\ a^3=aaa,\ a^4=aaaa,\ \text{ec.}\ \ldots$$

La potenza del secondo grado chiamasi altresì *quadrato*, e quella del terzo dicesi *cubo*.

103. La somma e la sottrazione delle potenze non ha difficoltà alcuna: siffatte operazioni si eseguono alla medesima maniera che nelle altre quantità. Per ciò che riguarda la moltiplicazione, si esprimano per m ed n due numeri interi; il prodotto di tanti fattori $= a$, quante sono le unità in $m+n$ è (102) a^{m+n}: ma questo stesso prodotto s'indica evidentemente per $a^m \,.\, a^n$ (80). Sarà dunque

$$a^m \,.\, a^n = a^{m+n};$$

e generalmente se come con m, n così pure con $p, q, r, \ldots$ si esprimano numeri interi, otterremo

$$a^m \,.\, a^n \,.\, a^p \,.\, a^q \,.\, a^r \ldots = a^{m+n+p+q+r+\ldots\ldots}$$

Il prodotto cioè di più potenze della medesima radice a *pareggia una potenza di cui la radice è la stessa quantità* a *e l'esponente uguaglia la somma degli esponenti delle potenze date.*

Dippiù se con $b, c, d, e, \ldots$ similmente che con a s'intendano delle quantità o positive o negative; un prodotto di tanti fattori $= a.b.c.d.e\ldots$ quante unità si comprendono nel numero m s'indicherà con $(a.b.c.d.e\ldots)^m$. Ma questo prodotto medesimo esprimesi ugualmente bene per $a^m \,.\, b^m \,.\, c^m \,.\, d^m \,.\, e^m \ldots\ldots$ Adunque otterremo

$$(a.b.c.d.e\ldots)^m = a^m \,.\, b^m \,.\, c^m \,.\, d^m \,.\, e^m \ldots$$

104. Del segno $>$ ovvero $<$ si fa uso in Algebra per dinotare la disuguaglianza fra due quantità. Questo segno posto fra le due quantità disuguali significa che quella che è situata dalla parte della sua apertura è la maggiore, e la minore quella che trovasi dalla parte opposta.

Ciò premesso, suppongasi in $\frac{a^m}{a^n}$ l'esponente $m > n$; siccome a^m è il prodotto di m fattori ciascuno $= a$, ed a^n il prodotto di n fattori ciascuno $= a$, potranno togliersi in $\frac{a^m}{a^n}$, salvo il proprio valore, quei fattori che sono comuni al dividendo ed al divisore: ciò fatto si ridurrà il divisore alla unità, ed il dividendo al prodotto di $m-n$ fattori ciascuno $= a$. Nella supposizione adunque di $m > n$, sarà

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^{m-n}}{1} = a^{m-n}.$$

Che se in $\frac{a^m}{a^n}$ si metta $m = n$, risulterà

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^m} = a^0 = 1.$$

Da ultimo suppongasi in $\frac{a^m}{a^n}$ $m < n$, con un ragionamento analogo al precedente, troveremo

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}.$$

Ma (103) $\frac{1}{a^{n-m}} = \frac{a^{m-n}}{a^{m-n} \,.\, a^{n-m}} = \frac{a^{m-n}}{a^{m-n+n-m}} = \frac{a^{m-n}}{a^0} = a^{m-n}$. Dunque nella ipotesi ancora di $m<n$ sarà

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \,.$$

Potrà quindi stabilirsi il seguente teorema. *Il quoziente della divisione di due potenze, le quali abbiano le radici uguali alla medesima quantità* a *è uguale ad una potenza che ha la stessa quantità* a *per radice, e per esponente la differenza degli esponenti del dividendo e del divisore.*

105. La formola $a^0 = 1$ c' insegna *che una potenza di cui è zero il grado dovrà riguardarsi come il simbolo della unità*. Poichè dunque $a^0 = 1$, si avrà (104)

$$\frac{1}{a^m} = \frac{a^0}{a^m} = a^{0-m} = a^{-m} \;;$$

$$\frac{1}{a^{-m}} = \frac{a^0}{a^{-m}} = a^{0+m} = a^m \,.$$

Innalzare cioè la quantità a *alla potenza notata con esponente negativo ed* $= -$m , *non è altro che dividere la unità per* a^m : *e vicendevolmente elevare* a *alla potenza notata con indice positivo ed* $=$ m , *non è altro che dividere la unità per* a^{-m} . Ciò posto ciascun vede essere ancora (103)

$$a^{-m}.a^{-n}.a^{-p}.a^{-q}.a^{-r}\ldots = \frac{1}{a^m}\cdot\frac{1}{a^n}\cdot\frac{1}{a^p}\cdot\frac{1}{a^q}\cdot\frac{1}{a^r}\ldots = \frac{1}{a^m.a^n.a^p.a^q.a^r\ldots} =$$

$$= \frac{1}{a^{m+n+p+q+r+\ldots}} = a^{-(m+n+p+q+r+\ldots)} = a^{-m-n-p-q-r-\ldots} \,,$$

e similmente

$$a^{-m}\,.\,b^{-m}\,.\,c^{-m}\,.\,d^{-m}\,.\,e^{-m}\ldots = \frac{1}{a^m}\cdot\frac{1}{b^m}\cdot\frac{1}{c^m}\cdot\frac{1}{d^m}\cdot\frac{1}{e^m}\ldots =$$

$$= \frac{1}{a^m\,.\,b^m\,.\,c^m\,.\,d^m\,.\,e^m\ldots} = \frac{1}{(a.b.c.d.e\ldots)^m} = (a.b.c.d.e\ldots.)^{-m} \,.$$

106. Occorre spessissimo che una potenza debba innalzarsi ad un' altra potenza. Vogliasi ad esempio la potenza a^m elevare alla potenza del grado n. Si rappresenti questa per $(a^m)^n$: sarà

$$(a^m)^n = a^{mn} \,.$$

Infatti (103) $(a^m)^n = (a.a.a.a\ldots.)^n = a^n\,.\,a^n\,.\,a^n\,.\,a^n\ldots = a^{n+n+n+n+\ldots}$: or esprimendo a^m il prodotto di tanti fattori $=a$ quante unità si contengono in m, dovrà la somma $n+n+n+n+\ldots$ contenere m volte il termine n, sarà perciò uguale ad mn ; donde $(a^m)^n = a^{mn}$. *S' innalza dunque una qualunque po-*

tenza ad un' altra potenza moltiplicando il grado della prima per quello della seconda.

107. Essendo come sopra m numero intero, da una qualunque quantità a positiva o negativa *estrarre la radice* indicata dal numero m significa trovare un terzo numero tale che elevato alla potenza del grado m riproduca a. Il numero m col quale si esprime il grado della radice, chiamasi ancor quì l'*esponente* ovvero l'*indice* di essa, e la radice si suole rappresentare con $\sqrt[m]{a}$.

La radice del secondo grado dicesi *quadrata*, quella poi del terzo grado si chiama *cubica*: la radice quadrata, soppresso l'indice, suole altresì notarsi con $\sqrt{a}$.

Dalla definizione della operazione di cui trattiamo conseguitano le seguenti formole

$$a = \sqrt{a^2} = \sqrt[3]{a^3} = \sqrt[4]{a^4} = \sqrt[5]{a^5} = \text{ec...}$$

$$a^2 = \sqrt{a^4} = \sqrt[3]{a^6} = \sqrt[4]{a^8} = \sqrt[5]{a^{10}} = \text{ec...}$$

$$\sqrt{a^{12}} = a^6,\ \sqrt[3]{a^{12}} = a^4,\ \sqrt[4]{a^{12}} = a^3,\ \sqrt[6]{a^{12}} = a^2,\ \sqrt[12]{a^{12}} = a.$$

E generalmente se si proponga una qualunque potenza a^m si otterranno le sue diverse radici come segue

$$\sqrt{a^m} = a^{\frac{m}{2}},\ \sqrt[3]{a^m} = a^{\frac{m}{3}},\ \sqrt[4]{a^m} = a^{\frac{m}{4}}, \ldots \sqrt[m']{a^m} = a^{\frac{m}{m'}}.$$

Ogni radice adunque si esprime per una potenza il cui indice è una frazione che per numeratore ha l'esponente della quantità posta sotto il segno radicale, e per denominatore l'esponente della radice medesima; e vicendevolmente.

108. Dalla proposizione precedente chiaro apparisce che si otterrà la vera radice di una potenza quantunque volte l'esponente della potenza sarà divisibile esattamente per quello della radice. Ove poi l'esponente della radice non possa dividere esattamente quello della potenza non sarà possibile ottenere la radice; così da a^3 non potrà estrarsi la radice quadrata, perchè il 3 non è divisibile esattamente per 2. Nè di ciò è a farne le maraviglie ove pur si rifletta non esservi alcuna potenza di a che moltiplicata per se stessa faccia risultarne a^3. Siffatte radici che non possono assegnarsi diconsi *radicali*: esse però, come nel corso delle lezioni si farà noto, possono ottenersi approssimate tanto quanto il richieggono le circostanze, e tanto altresì quanto si voglia. Donde si comprende perchè i radicali diconsi ancora quantità *incommensurabili* ed *irrazionali* (11).

109. A fine di paragonare fra loro le quantità radicali di diverso esponente farà d'uopo ridurle prima all'esponente medesimo.

Si abbiano ad esempio i radicali $\sqrt[m]{a^{m'}}$, $\sqrt[n]{b^{n'}}$; questi equivalgono ad $a^{\frac{m'}{m}}$, $b^{\frac{n'}{n}}$: or le frazioni $\frac{m'}{m}$, $\frac{n'}{n}$ ridotte al medesimo denominatore diventano (98) $\frac{m'n}{mn}$,

$\frac{mn'}{mn}$, e quindi i radicali proposti si rappresenteranno con

$$a^{\frac{m'n}{mn}},\ b^{\frac{mn'}{mn}},$$

ossia con

$$\sqrt[mn]{a^{m'n}},\ \sqrt[mn]{b^{mn'}},$$

che hanno il medesimo esponente. Nella stessa guisa riducendo al medesimo esponente i radicali

$$\sqrt[m]{a^{m'}},\ \sqrt[n]{b^{n'}},\ \sqrt[p]{c^{p'}},\ \sqrt[q]{d^{q'}},\ldots$$

si otterranno i seguenti altri

$$\sqrt[mnpq\ldots]{a^{m'npq\ldots}},\ \sqrt[mnpq\ldots]{b^{n'mpq\ldots}},\ \sqrt[mnpq\ldots]{c^{p'mnq\ldots}},\ \sqrt[mnpq\ldots]{d^{q'mnp\ldots}},\ldots$$

che sono uguali rispettivamente ai primi.

110. Essendo (103. 106)

$$(a^m.b^m.c^m.d^m\ldots)^{m'}=([a.b.c.d\ldots]^m)^{m'}=(a.b.c.d\ldots)^{mm'}=a^{mm'}.b^{mm'}.c^{mm'}.d^{mm'},$$

sarà pure

$$\sqrt[m']{a^m\,.\,b^m\,.\,c^m\,.\,d^m\ldots}=\sqrt[m']{(a.b.c.d\ldots)^m}=(a.b.c.d\ldots)^{\frac{m}{m'}}=a^{\frac{m}{m'}}.\,b^{\frac{m}{m'}}.\,c^{\frac{m}{m'}}.\,d^{\frac{m}{m'}}\ldots$$

Estrarre infatti dalla quantità $a^m\,.\,b^m\,.\,c^m\,.\,d^m\ldots$ la radice m', è una operazione direttamente contraria all' altra con cui la quantità medesima s' innalza alla potenza del grado m'; adunque se il risultato di questa seconda operazione è $a^{mm'}\,.\,b^{mm'}\,.\,c^{mm'}\,.\,d^{mm'}\ldots$, dovrà quello della prima essere $a^{\frac{m}{m'}}.\,b^{\frac{m}{m'}}.\,c^{\frac{m}{m'}}.\,d^{\frac{m}{m'}}\ldots$

Dippiù avremo (103)

$$a^{\frac{m}{m'}}.\,a^{\frac{n}{n'}}.\,a^{\frac{p}{p'}}.\,a^{\frac{q}{q'}}\ldots=a^{\frac{mn'p'q'\ldots}{m'n'p'q'\ldots}}.\,a^{\frac{nm'p'q'\ldots}{m'n'p'q'\ldots}}.\,a^{\frac{pm'n'q'\ldots}{m'n'p'q'\ldots}}.\,a^{\frac{qm'n'p'\ldots}{m'n'p'q'\ldots}}\ldots=$$

$$=\sqrt[m'n'p'q'\ldots]{a^{mn'p'q'\ldots}.a^{nm'p'q'\ldots}.a^{pm'n'q'\ldots}.a^{qm'n'p'\ldots}\ldots}=$$

$$=\sqrt[m'n'p'q'\ldots]{a^{mn'p'q'\ldots+nm'p'q'\ldots+pm'n'q'\ldots+qm'n'p'\ldots+\ldots}}=$$

$$=a^{\frac{mn'p'q'\ldots+nm'p'q'\ldots+pm'n'q'\ldots+qm'n'p'\ldots+\ldots}{m'n'p'q'\ldots}}=a^{\frac{m}{m'}+\frac{n}{n'}+\frac{p}{p'}+\frac{q}{q'}+\ldots}$$

111. Se innalzando $\frac{a^m}{a^n}$ alla potenza del grado m' si ottiene (100. 106) $\frac{a^{mm'}}{a^{nm'}}$, si dovrà vicendevolmente ottenere $\sqrt[m']{\frac{a^m}{a^n}} = \frac{a^{\frac{m}{m'}}}{a^{\frac{n}{m'}}}$. Ma $\sqrt[m']{\frac{a^m}{a^n}} = \sqrt[m']{a^{m-n}} =$ $= a^{\frac{m}{m'}-\frac{n}{m'}}$. Adunque sarà

$$\frac{a^{\frac{m}{m'}}}{a^{\frac{n}{m'}}} = a^{\frac{m}{m'}-\frac{n}{m'}}.$$

E più generalmente ancora

$$\frac{a^{\frac{m}{m'}}}{a^{\frac{n}{n'}}} = \frac{a^{\frac{mn'}{m'n'}}}{a^{\frac{nm'}{m'n'}}} = a^{\frac{mn'}{m'n'}-\frac{nm'}{m'n'}} = a^{\frac{m}{m'}-\frac{n}{n'}}.$$

Quindi (104)

$$\frac{1}{a^{\frac{m}{m'}}} = \frac{a^0}{a^{\frac{m}{m'}}} = a^{0-\frac{m}{m'}} = a^{-\frac{m}{m'}},$$

$$\frac{1}{a^{-\frac{m}{m'}}} = \frac{a^0}{a^{-\frac{m}{m'}}} = a^{0+\frac{m}{m'}} = a^{\frac{m}{m'}}.$$

112. Da siffatte formole ricaveremo altresì le altre (110)

$$a^{-\frac{m}{m'}} \cdot b^{-\frac{m}{m'}} \cdot c^{-\frac{m}{m'}} \cdot d^{-\frac{m}{m'}} \ldots = \frac{1}{a^{\frac{m}{m'}}} \cdot \frac{1}{b^{\frac{m}{m'}}} \cdot \frac{1}{c^{\frac{m}{m'}}} \cdot \frac{1}{d^{\frac{m}{m'}}} \ldots =$$

$$= \frac{1}{(a.b.c.d\ldots)^{\frac{m}{m'}}} = (a.b.c.d\ldots)^{-\frac{m}{m'}},$$

$$a^{-\frac{m}{m'}} \cdot a^{-\frac{n}{n'}} \cdot a^{-\frac{p}{p'}} \cdot a^{-\frac{q}{q'}} \ldots = \frac{1}{a^{\frac{m}{m'}}} \cdot \frac{1}{a^{\frac{n}{n'}}} \cdot \frac{1}{a^{\frac{p}{p'}}} \cdot \frac{1}{a^{\frac{q}{q'}}} \ldots =$$

$$= \frac{1}{a^{\frac{m}{m'}+\frac{n}{n'}+\frac{p}{p'}+\frac{q}{q'}+\ldots}} = a^{-\frac{m}{m'}-\frac{n}{n'}-\frac{p}{p'}-\frac{q}{q'}-\ldots}.$$

113. Poichè $\sqrt[m']{a^m} = a^{\frac{m}{m'}}$; sarà (110) $(\sqrt[m']{a^m})^n = (a^{\frac{m}{m'}})^n = a^{\frac{m}{m'}} . a^{\frac{m}{m'}} . a^{\frac{m}{m'}} . a^{\frac{m}{m'}} \ldots$ $= a^{\frac{m}{m'}+\frac{m}{m'}+\frac{m}{m'}+\frac{m}{m'}+\ldots} = (a.a.a.a\ldots)^{\frac{m}{m'}} = (a^n)^{\frac{m}{m'}} = a^{\frac{m}{m'}\times n} = a^{\frac{mn}{m'}} = \sqrt[m']{a^{mn}}$: ri-

sulterà quindi per lo contrario

$$\sqrt[n]{\sqrt[m']{a^m}} = \sqrt[n]{a^{\frac{m}{m'}}} = a^{\frac{m}{m'}:n} = a^{\frac{m}{m'n}} = \sqrt[m'n]{a^m}.$$

Per innalzare adunque un radicale ad una potenza di un dato grado, converrà moltiplicare l' esponente della quantità posta sotto il segno radicale pel grado della potenza data. Ma affine di estrarre da un radicale una radice di un dato esponente farà d' uopo moltiplicare per questo esponente l' esponente del radicale. Laonde saranno

$$(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2} = a,\ (\sqrt{a})^3 = \sqrt{a^3},\ (\sqrt{a})^4 = \sqrt{a^4} = a^2,\ \text{ec....}$$

$$\sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a},\ \sqrt[3]{\sqrt{a}} = \sqrt[6]{a},\ \sqrt[4]{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[12]{a},\ \text{ec...}$$

Finalmente

$$\left(a^{\frac{m}{m'}}\right)^{\frac{n}{n'}} = \sqrt[n']{\left(\sqrt[m']{a^m}\right)^n} = \sqrt[m'n']{a^{mn}} = a^{\frac{mn}{m'n'}}.$$

114. Dalle formole dimostrate nei numeri superiori senza la menoma difficoltà si calcoleranno i seguenti esempii.

$$\sqrt{16a^4.b^6.c^8} = (4^2a^4.b^6.c^8)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{2}{2}}.a^{\frac{4}{2}}.b^{\frac{6}{2}}.c^{\frac{8}{2}} = 4a^2.b^3.c^4,$$

$$\sqrt[3]{27a^9.b^{12}.c^{15}} = (3^3a^9.b^{12}.c^{15})^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{3}{3}}.a^{\frac{9}{3}}.b^{\frac{12}{3}}.c^{\frac{15}{3}} = 3a^3.b^4.c^5,$$

$$\sqrt{a}.\sqrt{b}.\sqrt{c} = a^{\frac{1}{2}}.b^{\frac{1}{2}}.c^{\frac{1}{2}} = (a.b.c.)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a.b.c},$$

$$\sqrt[3]{a^2.b}.\sqrt[3]{c.d^2} = (a^2.b)^{\frac{1}{3}}(c.d^2)^{\frac{1}{3}} = (a^2.b.c.d^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a^2.b.c.d^2},$$

$$\sqrt{a}.\sqrt[3]{b^2}.\sqrt[4]{c^3} = a^{\frac{1}{2}}.b^{\frac{2}{3}}.c^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{6}{12}}.b^{\frac{8}{12}}.c^{\frac{9}{12}} = \sqrt[12]{a^6.b^8.c^9},$$

$$\sqrt{a}.\sqrt[3]{a}.\sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{3}}.a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = a^{1+\frac{1}{24}} = a.a^{\frac{1}{12}} = a\sqrt[12]{a},$$

$$\sqrt[3]{a^2}.\sqrt[4]{a^3}.\sqrt[6]{a^4} = a^{\frac{2}{3}}.a^{\frac{3}{4}}.a^{\frac{4}{6}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{6}} = a^{2+\frac{1}{12}} = a^2.a^{\frac{1}{12}} = a^2\sqrt[12]{a},$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{1}{2}}.b^{-\frac{1}{2}} = (a.b^{-1})^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{a}{b}},$$

$$\frac{\sqrt[3]{a^2.b^2.c}}{\sqrt[3]{a^5.b.c^2}} = (a^2.b^2.c)^{\frac{1}{3}}(a^5.b.c^2)^{-\frac{1}{3}} = \left(a^2.b^2.c\,(a^5.b.c^2)^{-1}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{b}{a^3c}},$$

$$(a+\sqrt{a}-\sqrt{a+b})(2a-\sqrt{a}+2\sqrt{a+b})=$$

$$=2a^2-3a-2b+a\sqrt{a}+3\sqrt{a(a+b)},$$

$$(a+2\sqrt{a}+\sqrt[3]{b})(4a-3\sqrt{a}+2\sqrt[3]{b})=$$

$$=4a^2+5a\sqrt{a}+6a\sqrt[3]{b}-6a+\sqrt[6]{a^3b^2}+2\sqrt[3]{b^2},$$

$$\frac{2a^2-2a+12\sqrt{ab}-18b}{a+\sqrt{a}-3\sqrt{b}}=2a-2\sqrt{a}+6\sqrt{b},$$

$$\frac{6a-\sqrt[6]{a^3b^2}-12\sqrt[3]{b^2}}{2\sqrt{a}-3\sqrt[3]{b}}=3\sqrt{a}+4\sqrt[3]{b},$$

ec. ec. . . . .

CAPO IV.

DELLE QUANTITÀ IMMAGINARIE.

115. Tutte le radici d'indice pari diconsi assurde, impossibili ovvero *immaginarie* quante volte la quantità posta sotto il segno radicale sia negativa. Infatti il quadrato di una qualunque quantità positiva o negativa, è sempre positivo, essendo (85) $+a\times+a=+a^2$, e $-a\times-a=+a^2$. Sarà quindi impossibile estrarre da una quantità negativa la radice quadrata, poichè con siffatta operazione si andrebbe in traccia di una quantità che moltiplicata per se medesima desse una quantità negativa. La quantità dunque $\sqrt{-A}$ è assurda, impossibile, ed immaginaria. Per lo contrario il cubo di una quantità positiva essendo anch'esso positivo, e negativo quello di una quantità negativa, giacchè $+a\times+a\times+a=+a^3$ e $-a\times-a\times-a=-a^3$, la radice cubica di una quantità negativa non è assurda ma possibile bensì e *reale*; onde tra le radici cubiche non potranno aver luogo le quantità immaginarie. Ma dovendo le quarte potenze essenzialmente godere del segno positivo, le radici quarte di quantità negative saranno altresì impossibili ad ottenersi, e quindi immaginarie. La radice dunque $\sqrt[4]{-A}$ come la $\sqrt{-A}$ sarà immaginaria. Sicchè in generale, esprimendosi con $2i$ un numero pari, le quantità immaginarie avranno luogo fra le radici della forma $\sqrt[2i]{-A}$.

116. Oltre le quantità reali razionali od irrazionali, consideriamo nell'Algebra ancora le quantità immaginarie sottoponendole alle medesime operazioni, cui assoggettiamo le quantità reali. Così la espressione immaginaria $\sqrt{-1}$ non al-

trimenti la trattiamo che se fosse una quantità reale il cui quadrato $=-1$ (*). Essendo pertanto $-A=A\times-1$, sarà pure $\sqrt{-A}=\sqrt{A}\,\sqrt{-1}=a\sqrt{-1}$, ponendo $\sqrt{A}=a$. Ora il prodotto di due quantità immaginarie della forma $a\sqrt{-1}$ è sempre reale, ed è positivo ove i fattori immaginarii abbiano segni diversi, è poi negativo nel caso che i fattori medesimi sieno affetti dagli stessi segni. Infatti abbiamo

$$a\sqrt{-1}\times b\sqrt{-1}=ab(\sqrt{-1})^2=-ab,$$
$$-a\sqrt{-1}\times b\sqrt{-1}=-ab(\sqrt{-1})^2=ab,$$
$$a\sqrt{-1}\times -b\sqrt{-1}=-ab(\sqrt{-1})^2=ab,$$
$$-a\sqrt{-1}\times -b\sqrt{-1}=ab(\sqrt{-1})^2=-ab.$$

117. Per ciò che riguarda la divisione delle quantità immaginarie della forma monomia $a\sqrt{-1}$ allorchè il dividendo ed il divisore sono ambedue immaginarii, il quoziente è reale, e per i segni valgono le solite regole (8). Così

$$\frac{ab\sqrt{-1}}{b\sqrt{-1}}=\frac{ab}{b}=a,\quad \frac{-ab\sqrt{-1}}{b\sqrt{-1}}=\frac{-ab}{b}=-a,$$

$$\frac{ab\sqrt{-1}}{-b\sqrt{-1}}=\frac{ab}{-b}=-a,\quad \frac{-ab\sqrt{-1}}{-b\sqrt{-1}}=\frac{-ab}{-b}=a.$$

Ove però una quantità reale per esempio ab, dovesse dividersi per la quantità immaginaria $b\sqrt{-1}$, il quoziente risulterebbe immaginario, ed insieme nega-

(*) Dal detto sopra (113) agevolmente si deduce che il quadrato di una espressione radicale del secondo grado si ottiene col semplicemente sopprimere in essa il segno radicale. Con tutta ragione potrà dunque supporsi $(\sqrt{-1})^2=-1$, e più generalmente ancora $(\sqrt{-A})^2=-A$.

Da un'altra parte però sapendosi (110. 114) che per moltiplicare due espressioni radicali dello stesso grado bisogna fare il prodotto delle quantità sottoposte ai segni radicali, e prefiggere a questo prodotto un segno radicale del medesimo grado, pare potersi prendere ancora $+A$ pel quadrato di $\sqrt{-A}$; perocchè questo quadrato è $\sqrt{-A}\times\sqrt{-A}=$ $=\sqrt{-A\times-A}=\sqrt{A^2}$.

Bézout ha benissimo spiegata questa difficoltà, osservando che quando s'ignora in qual maniera sia stato formato il quadrato A^2, e se ne dimanda la radice, deve assegnarsi ugualmente $+A$ e $-A$; ma che quando si sa antecedentemente quale di queste due quantità sia stata moltiplicata per se medesima onde produrre A^2, non è più permesso, allorchè si fa ritorno su i proprii passi, di prenderne un'altra. Questo caso è evidentemente quello della espressione $\sqrt{-A}\times\sqrt{-A}$: si sa allora che la quantità A^2, compresa sotto il radicale $\sqrt{A^2}$, deriva da $-A$ moltiplicata per $-A$; cessa dunque l'ambiguità; e quando si ritorna alla radice, bisogna scrivere $-A$.

tivo, secondo che il dividendo reale ed il divisore immaginario avessero i medesimi segni, ovvero segni contrarii; poichè

$$\frac{ab}{b\sqrt{-1}}=\frac{a}{\sqrt{-1}}=\frac{-a\sqrt{-1}}{-(\sqrt{-1})^2}=-a\sqrt{-1},$$

$$\frac{-ab}{b\sqrt{-1}}=\frac{-a}{\sqrt{-1}}=\frac{a\sqrt{-1}}{-(\sqrt{-1})^2}=a\sqrt{-1},$$

$$\frac{ab}{-b\sqrt{-1}}=\frac{a}{-\sqrt{-1}}=\frac{-a\sqrt{-1}}{(\sqrt{-1})^2}=a\sqrt{-1},$$

$$\frac{-ab}{-b\sqrt{-1}}=\frac{-a}{-\sqrt{-1}}=\frac{-a\sqrt{-1}}{-(\sqrt{-1})^2}=-a\sqrt{-1}.$$

118. Abbiamo (116)

$$(a\sqrt{-1})^2=a\sqrt{-1}.a\sqrt{-1}=-a^2,$$
$$(a\sqrt{-1})^3=-a^2.a\sqrt{-1}=-a^3\sqrt{-1},$$
$$(a\sqrt{-1})^4=-a^3\sqrt{-1}.a\sqrt{-1}=a^4,$$
$$(a\sqrt{-1})^5=a^4.a\sqrt{-1}=a^5\sqrt{-1},$$
$$(a\sqrt{-1})^6=a^5\sqrt{-1}.a\sqrt{-1}=-a^6,$$
$$(a\sqrt{-1})^7=-a^6.a\sqrt{-1}=-a^7\sqrt{-1},$$
$$(a\sqrt{-1})^8=-a^7\sqrt{-1}.a\sqrt{-1}=a^8,$$
$$(a\sqrt{-1})^9=a^8.a\sqrt{-1}=a^9\sqrt{-1},$$

ec. ec. . . . .

quindi in generale saranno

$$(a\sqrt{-1})^{2i}=\pm a^{2i},\quad (a\sqrt{-1})^{2i+1}=\pm a^{2i+1}\sqrt{-1},$$

in cui ha luogo il segno superiore se i è pari, e l' inferiore se i è dispari.

119. Comunque si presentino le immaginarie espressioni, noi le ridurremo sempre alla forma $u+v\sqrt{-1}$, acconciamente cioè determinando, se fia d' uopo, le quantità reali u e v. Notisi pertanto che annullandosi v si reputa eziandio annullato il termine $v\sqrt{-1}$ nella formola $u+v\sqrt{-1}$, la quale s' intende per-

ciò ridotta alla quantità reale u. Inoltre la equazione immaginaria

$$a+b\sqrt{-1}=h+k\sqrt{-1}$$

importerà sempre la uguaglianza tra le quantità a ed h, b e k, importerà cioè sempre $a=h$ e $b=k$; poichè se $a+b\sqrt{-1}=h+k\sqrt{-1}$, sarà certamente $(a+b\sqrt{-1})-(h+k\sqrt{-1})=(a-h)-(k-b)\sqrt{-1}=o$. Or $(a-h)-$ $-(k-b)\sqrt{-1}=o$ non può soddisfarsi in altra guisa che col mettere $a-h=o$ e $k-b=o$, ossia $a=h$ e $b=k$; infatti per qualunque altra supposizione si faccia è sempre un assurdo che una quantità immaginaria tolta da una quantità reale dia zero per residuo.

120. Sarà ora agevole moltiplicare fra loro dei polinomii immaginarii. Eccone pertanto i seguenti esempii

$$\begin{aligned}(a+b\sqrt{-1})(c+e\sqrt{-1})&=c(a+b\sqrt{-1})+e\sqrt{-1}\,(a+b\sqrt{-1})=\\&=ac+bc\sqrt{-1}+ae\sqrt{-1}+be\,(\sqrt{-1})^2=\\&=(ac-be)+(bc+ae)\sqrt{-1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4a+3b\sqrt{-1}+2c\sqrt{-1})(6a-2b\sqrt{-1}+3c\sqrt{-1})&=\\&=6a(4a+3b\sqrt{-1}+2c\sqrt{-1})-\\&-2b(4a+3b\sqrt{-1}+2c\sqrt{-1})\sqrt{-1}+\\&+3c(4a+3b\sqrt{-1}+2c\sqrt{-1})\sqrt{-1}=\end{aligned}$$

$$=(24a^2+6b^2-5bc-6c^2)+(10ab+24ac)\sqrt{-1}.$$

$$\begin{aligned}(u+v\sqrt{-1})(u-v\sqrt{-1})&=u^2+uv\sqrt{-1}-uv\sqrt{-1}-v^2(\sqrt{-1})^2=\\&=u^2-v^2(\sqrt{-1})^2=u^2+v^2.\end{aligned}$$

Le formole immaginarie $u+v\sqrt{-1}$, ed $u-v\sqrt{-1}$ diconsi coniugate fra loro.

121. Poichè dunque

$$\begin{aligned}&(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})=a^2+b^2,\\&(h+k\sqrt{-1})(h-k\sqrt{-1})=h^2+k^2,\\&(a+b\sqrt{-1})(h+k\sqrt{-1})=ah-bk+(ak+bh)\sqrt{-1},\\&(a-b\sqrt{-1})(h-k\sqrt{-1})=ah-bk-(ak+bh)\sqrt{-1};\end{aligned}$$

sarà quindi

$$(a^2+b^2)(h^2+k^2)=(a+b\sqrt{-1})(h+k\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})(h-k\sqrt{-1})=$$
$$=((ah-bk)+(ak+bh)\sqrt{-1})((ah-bk)-(ak+bh)\sqrt{-1}).$$

Ma si sa essere $((ah-bk)+(ak+bh)\sqrt{-1})((ah-bk)-(ak+bh)\sqrt{-1})=$
$=(ah-bk)^2+(ak+bh)^2$: dunque

$$(a^2+b^2)(h^2+k^2)=(ah-bk)^2+(ak+bh)^2,$$

e permutando h in k e k in h, sarà altresì

$$(a^2+b^2)(h^2+k^2)=(ak-bh)^2+(ah+bk)^2.$$

Da queste due ultime uguaglianze manifestamente conseguita che ove due numeri sieno tali da potersi ciascuno risolvere in due quadrati, si potrà il loro prodotto risolvere doppiamente in due quadrati. Ad esempio

$$40=6^2+2^2,\ \text{e}\ 58=7^2+3^2,$$

sarà $40.58=(6^2+2^2)(7^2+3^2)=(6.7-2.3)^2+(6.3+2.7)^2=(6.3-2.7)^2+$
$+(6.7+2.3)^2$, cioè

$$40.58=36^2+32^2=4^2+48^2.$$

Così pure essendo

$$193=7^2+12^2,\ 194=5^2+13^2,$$

sarà $193.194=(7^2+12^2)(5^2+13^2)=(7.5-12.13)^2+(7.13+12.5)^2=$
$=(7.13-12.5)^2+(7.5+12.13)^2$, cioè

$$193.194=121^2+151^2=31^2+191^2.$$

Di qui s' incomincerà ad intendere come l' uso delle quantità immaginarie possa nell' Algebra valere ad indagare le proprietà delle quantità reali.

122. Intorno alla divisione delle quantità immaginarie polinomie basterà accennare i seguenti esempii. Abbiamo

$$i\left(\frac{h}{i}+\frac{k}{i}\sqrt{-1}\right)=h+k\sqrt{-1};$$

sarà quindi

$$\frac{h}{i}+\frac{k}{i}\sqrt{-1}=\frac{h+k\sqrt{-1}}{i}.$$

Dippiù essendo

$$\frac{(a+b\sqrt{-1})(c-e\sqrt{-1})}{c^2+e^2}\cdot(c+e\sqrt{-1})=a+b\sqrt{-1};$$

sarà pure

$$\frac{a+b\sqrt{-1}}{c+e\sqrt{-1}}=\frac{(a+b\sqrt{-1})(c-e\sqrt{-1})}{c^2+e^2}=$$

$$=\frac{ac-ae\sqrt{-1}+bc\sqrt{-1}-be(\sqrt{-1})^2}{c^2+e^2}=\frac{ac+be}{c^2+e^2}+\frac{bc-ae}{c^2+e^2}\sqrt{-1}.$$

Finalmente operando con i soliti metodi indicati sopra (88.89. ec.), agevolmente si otterrà

$$\frac{24a^2+10ab\sqrt{-1}+24ac\sqrt{-1}+6b^2-5bc-6c^2}{4a+3b\sqrt{-1}+2c\sqrt{-1}}=6a-(2b-3c)\sqrt{-1}.$$

CAPO V.

DELLE POTENZE E DELLE RADICI DEI POLINOMII.

123. Diciamo ora delle potenze dei polinomii e del modo onde poter estrarre dai medesimi una data radice. Tutte le potenze di una quantità qualunque si ottengono con la successiva moltiplicazione della data quantità per se stessa; tante volte cioè dovrà la data quantità per se stessa moltiplicarsi quante n' esprime l'esponente della potenza, a cui essa si vuole elevare, diminuito di una unità. Sarà quindi

$$(a+b)^1=a+b,$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$
$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4,$$
$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5,$$
$$(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6,$$
$$(a+b)^7=a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7,$$

ec. ec. . . . .

dove le quantità a e b possono essere reali o immaginarie, poichè le espressioni immaginarie non meno che le reali sono talvolta indicate con una sola lettera, come se pongasi ad esempio $b=k\sqrt{-1}$.

Apparisce da questa tavola che *il quadrato di un binomio contiene sempre il quadrato del primo termine, il doppio prodotto del primo termine nel secondo; ed il quadrato del secondo termine;* similmente che *il cubo di*

un binomio è composto del cubo del primo termine, del triplo prodotto del quadrato del primo termine nel secondo, del triplo prodotto del primo termine nel quadrato del secondo, e del cubo del secondo termine; ec. ec. . .

124. Scriviamo ora la tavola precedente nella forma che segue

$$(a+b)^1=a+\frac{1}{1}b\,,$$

$$(a+b)^2=a^2+\frac{2}{1}a^{2-1}b+\frac{2.1}{1.2}b^2,$$

$$(a+b)^3=a^3+\frac{3}{1}a^{3-1}b+\frac{3.2}{1.2}a^{3-2}b^2+\frac{3.2.1}{1.2.3}b^3,$$

$$(a+b)^4=a^4+\frac{4}{1}a^{4-1}b+\frac{4.3}{1.2}a^{4-2}b^2+\frac{4.3.2}{1.2.3}a^{4-3}b^3+\frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}b^4,$$

$$(a+b)^5=a^5+\frac{5}{1}a^{5-1}b+\frac{5.4}{1.2}a^{5-2}b^2+\frac{5.4.3}{1.2.3}a^{5-3}b^3+\frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}a^{5-4}b^4+$$
$$+\frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5}b^5,$$

$$(a+b)^6=a^6+\frac{6}{1}a^{6-1}b+\frac{6.5}{1.2}a^{6-2}b^2+\frac{6.5.4}{1.2.3}a^{6-3}b^3+\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}a^{6-4}b^4+$$
$$+\frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5}a^{6-5}b^5+\frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6}b^6,$$

$$(a+b)^7=a^7+\frac{7}{1}a^{7-1}b+\frac{7.6}{1.2}a^{7-2}b^2+\frac{7.6.5}{1.2.3}a^{7-3}b^3+\frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}a^{7-4}b^4+$$
$$+\frac{7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5}a^{7-5}b^5+\frac{7.6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5.6}a^{7-6}b^6+\frac{7.6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6.7}b^7,$$

ec. ec. . . . .

Donde si scorge che in una potenza qualunque del binomio $a+b$ il primo termine non è altro che a elevata alla potenza corrispondente, il secondo termine contiene a innalzata ad una potenza minore di una unità della data e moltiplicata per b; nel terzo termine vi è a innalzata alla potenza data diminuita di due unità e moltiplicata per b^2; e così di seguito gli esponenti di a vanno sempre diminuendo di una unità, e quelli di b crescendo continuamente pure di una unità, in guisa che la somma degli esponenti di a e di b in qualsivoglia termine sia sempre uguale all' esponente della potenza data, finchè nell' ultimo termine svanisca l'esponente di a e quello di b divenga uguale al grado della potenza. Per quanto poi si appartiene ai coefficienti numerici, il coefficiente del secondo termine è sempre il grado della potenza diviso per 1; il coefficiente del terzo termine è uguale al coefficiente del secondo moltiplicato per l'esponente della poten-

za diminuito di 1 e diviso per 2 ; il coefficiente del quarto termine pareggia quello del terzo moltiplicato per l'esponente della potenza diminuito di 2 e diviso per 3 ; e così di seguito tutti gli altri coefficienti procedono con la medesima legge, dipendono cioè uno dall'altro col medesimo ordine. Volendo quindi innalzare il binomio $a+b$ ad una potenza qualunque del grado n otterremo

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} a^{n-3} b^3 +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} a^{n-4} b^4 + \ldots +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-(r-1))}{1.2.3.4\ldots r} a^{n-r} b^r \ldots (f_n)$$

di qualunque sorta sieno a e b, reali cioè o immaginarie.

Questa è la elegantissima *formola Newtoniana* così detta dal suo inventore *Newton*. Ma la dimostrazione che ne abbiamo data essendo appoggiata alla induzione non è abbastanza esatta e rigorosa ; poichè per quanto si prolunghi la tavola da noi addotta delle potenze del binomio , non mai potremo essere sicuri che le medesime leggi si verifichino nelle susseguenti potenze del medesimo. Supponghiamo pertanto che la succennata tavola si verifichi fino alla potenza del grado n , supponghiamo cioè che valga la formola (f_n) ; varrà eziandio l'altra

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \frac{n+1}{1} a^n b + \frac{(n+1)n}{1.2} a^{n-1} b^2 + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} a^{n-2} b^3 +$$

$$+ \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4} a^{n-3} b^4 + \ldots +$$

$$+ \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-2))}{1.2.3.4\ldots r} a^{n-(r-1)} b^r \ldots (f_{n+1}).$$

Infatti moltiplicando la (f_n) per $a+b$ si ottiene

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \frac{n}{1} a^n b + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-1} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} a^{n-2} b^3 + \ldots$$

$$+ a^n b + \frac{n}{1} a^{n-1} b^2 + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2} b^3 + \ldots$$

Ma

$$\frac{n}{1} a^n b + a^n b = \left(\frac{n}{1} + 1\right) a^n b = \frac{n+1}{1} a^n b ,$$

$$\frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-1} b^2 + \frac{n}{1} a^{n-1} b^2 = \frac{n}{1}\left(\frac{n-1}{2} + 1\right) a^{n-1} b^2 = \frac{(n+1)n}{1.2} a^{n-1} b^2 ,$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-2}b^3+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^3=\frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{n-2}{3}+1\right)a^{n-2}b^3=$$

$$=\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}a^{n-2}b^3\,,$$

ec. ec. . . . . ,

ed in generale

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1))}{1.2.3\ldots.r}a^{n-(r-1)}b^r+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-(r-2))}{1.2.3\ldots.(r-1)}a^{n-(r-1)}b^r=$$

$$=\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)\ldots.(n-(r-2))}{1.2.3\ldots.(r-1)r}a^{n-(r-1)}b^r\,.$$

Sostituendo dunque questi valori, risulterà evidentemente la formola (f_{n+1}). Suppongasi ora che la (f_n) rappresenti una determinata potenza del binomio $a+b$, ad esempio la settima quando si assume $n=7$, in virtù della (f_{n+1}) rappresenterà altresì la ottava ove si prenda $n=8$, e perciò la nona quando $n=9$, la decima allorchè $n=10$, e così di seguito. Ma realmente la (f_n) si verifica fino alla potenza settima, come l' abbiamo veduto sopra nella tavola; dunque si verificherà in generale per quanto grande si voglia supporre l' esponente n.

125. Allorchè b si cangia in $-b$, poichè

$$(-b)^2=b^2,(-b)^3=-b^3,(-b)^4=b^4,\text{ ec}\ldots,$$

la formola (f_n) si muterà nella seguente

$$(a-b)^n=a^n-\frac{n}{1}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3+\ldots\pm$$

$$\pm\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1))}{1.2.3\ldots r}a^{n-r}b^r\ldots(f'_n),$$

dove ha luogo il segno superiore se r è pari, l' inferiore se r è dispari. Tanto in (f_n) che in (f'_n) il termine $(r+1)^{simo}$, cioè

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-(r-1))}{1.2.3\ldots.r}a^{n-r}b^r\ldots.(\tau)$$

appellasi termine generale dello sviluppo della potenza n^{sima} del binomio $a+b$, o $a-b$; infatti preso successivamente $r=1$, $=2$, $=3$, ec. si convertirà (τ) nel secondo, terzo, quarto, ec. termine dello sviluppo medesimo.

126. Notiamo in questo e nei seguenti numeri alcune cose le quali in certo

modo riguardano i coefficienti delle formole (f_n), (f'_n), ovvero mostrano l'uso che delle medesime si fa nello investigare alcune proprietà dei numeri.

Di n lettere a, b, c, d, e, ... la prima a con le altre b, c, d, e, ... forma $n-1$ binarii ab, ac, ad, ae, ...; la seconda b con le altre a, c, d, e, ... forma parimente $n-1$ binarii ba, bc, bd, be, ... e così di seguito. Adunque il numero di tutti questi binarii sarà $n-1$ tante volte ripetuto quante sono le lettere a, b, c, d, e, ... sarà cioè $n(n-1)$.

Il binario ab costituisce con le lettere c, d, e, ... $n-2$ ternarii abc, abd, abe, ...; il binario ac con le lettere b, d, e, ... costituisce altresì $n-2$ ternarii acb, acd, ace, ... e così appresso. Laonde il numero dei ternarii sarà $n-2$ tante volte ripetuto quanti binarii possono formarsi con le n lettere a, b, c, d, e, ... Or questi binarii sono $n(n-1)$. Adunque sarà il numero dei ternarii $n(n-1)(n-2)$.

Di nuovo il ternario abc con le lettere d, e, ... forma $n-3$ quaternarii $abcd$, $abce$, ...; il ternario abd con le lettere c, e, ... forma similmente $n-3$ quaternarii $abdc$, $abde$, ... e così di seguito. Adunque sarà il numero di questi quaternarii uguale a $n(n-1)(n-2)(n-3)$. Similmente si troverà essere $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$ il numero dei quinarii, ec. ec. .... Quindi rilevasi la dottrina delle permutazioni, in cui si hanno per distinti fra loro quei binarii, ternarii, quaternarii, quinarii, ec. ..., nei quali contengonsi le medesime lettere ma disposte diversamente, come ab, ba; abc, bac; $abcd$, $bacd$; $abcde$, $bacde$; ec. ....

Ove poi siffatti binarii, ternarii, quaternarii, quinarii, ec. si considerino come uno stesso binario, quaternario, quinario, ec. ..., allora qualsivoglia binario s'incontrerà due volte, per esempio ab, ba, unendosi cioè a con b, e b con a: inoltre qualunque ternario si riprodurrà sei volte, per esempio abc, acb, bac, bca, cab, cba, dovendosi unire ciascuna delle tre lettere con i binarii delle due rimanenti cioè a con bc, cb; b con ac, ca; c con ab, ba: dippiù qualsivoglia quaternario si troverà ventiquattro volte; come ad esempio $abcd$, $abdc$, $acbd$, $acdb$, $adbc$, $adcb$, $bacd$, $badc$, $bcad$, $bcda$, $bdac$, $bdca$, $cabd$, $cadb$, $cbad$, $cbda$, $cdab$, $cdba$, $dabc$, $dacb$, $dbac$, $dbca$, $dcab$, $dcba$, unendosi successivamente ciascuna delle quattro lettere con i sei ternarii delle tre rimanenti, vale a dire a con bcd, bdc, cbd, cdb, dbc, dcb; b con acd, adc, cad, cda, dac, dca; c con abd, adb, bad, bda, dab, dba; d con abc, acb, bac, bca, cab, cba: similmente qualsivoglia quinario si ritroverà ripetuto cento venti volte, e così di seguito. Non avendo dunque riguardo, come suol farsi nelle mere combinazioni, all'ordine con cui sono disposte le lettere, esprimeranno

$$\frac{n(n-1)}{1.2}, \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}, \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}, \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5},$$

ec. . . . .

i numeri dei binarii, ternarii, quaternarii, quinarii, ec. ec. ....

Gioverà qui di passaggio notare una cosa sola. Avendo riguardo all'ordine con cui si dispongono le lettere, suppongasi dippiù che i binarii, ternarii, quaternarii, quinarii, ec. ... si formino altresì con la ripetizione della medesima lettera. Ai binarii $n(n-1)$ dovranno aggiugnersi altri n binarii aa, bb, cc, dd,

ee, ... per ottenere, nella supposizione in cui siamo, il numero totale dei binarii, che perciò sarà

$$n(n-1)+n=n^2.$$

Nella stessa ipotesi il numero dei ternarii si otterrà unendo successivamente ciascuna delle n lettere con gli n^2 binarii, ossia moltiplicando n^2 per n, e quindi sarà n^3 il numero di questi ternarii. In simil guisa si dimostra che n^4 esprimerà il numero dei quaternarii, ec.

Soggiungo ora due esempii, di cui il primo si appartiene alla dottrina delle permutazioni, il secondo a quella delle semplici combinazioni.

Otto persone che per l'ordinario si assidono alla medesima mensa due volte in ciascun dì, potranno permutare i posti, sicchè non mai per lo spazio di ben cinquantasei anni ritrovinsi fra loro nella medesima posizione. Infatti di otto persone possono formarsi $8.7.6.5.4.3.2.1$ ($=56.720$) ottonarii tutti disposti con ordine diverso; quindi supponendo che quelle persone in ciascun anno si assidano a mensa settecento venti volte solamente, e dividendo il numero 56.720 degli ottonarii per 720, si otterrà per quoto 56, che esprimerà il numero degli anni che debbono trascorrere perchè vengano esaurite tutte le permutazioni.

In un collegio si ritrovano trenta alunni, i quali ogni giorno escono al passeggio a tre a tre, eccettuatine i soli giorni festivi. Or può farsi che per lo spazio di quattordici anni non mai ripetasi l'istesso ternario di alunni. Imperocchè il numero dei ternarii che formansi dal combinare fra loro i trenta alunni a tre a tre è $\frac{30\,.\,29\,.\,28}{1\,.\,2\,.\,3}$ ($=14\,.\,290$). Per la qual cosa suppongasi che gli alunni si portino al passeggio duecento novanta volte per ciascun anno (perocchè i giorni che restano per completare l'anno sono comunemente giorni di festa); dividendo il numero $14\,.\,290$ per 290, il quoziente 14 esprimerà il numero degli anni che dovranno passare onde compire le combinazioni dei ternarii.

127. Dinotando k un numero primo (46), sarà k fattore del numero

$$(h+1)^k-h^k-1.$$

Si ha infatti (124)

$$(h+1)^k=h^k+\frac{k}{1}h^{k-1}+\frac{k(k-1)}{1.2}h^{k-2}+\frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}h^{k-3}+\ldots+$$

$$+\frac{k(k-1)(k-2)\ldots3.2.1}{1.2.3\ldots(k-1)}h+1,$$

donde, sottraendo dall'una e dall'altra parte h^k+1, risulterà

$$(h+1)^k-h^k-1=\frac{k}{1}h^{k-1}+\frac{k(k-1)}{1.2}h^{k-2}+\frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}h^{k-3}+\ldots+$$

$$+\frac{k(k-1)(k-2)\ldots3.2.1}{1.2.3\ldots(k-1)}h\ (*).$$

(*) Fingiamo che k non fosse un numero primo, in tal caso conterebbe k nel numero dei suoi fattori alcuno dei numeri 2, 3, 4, ... donde ne seguirebbe che non tutti i ter-

Mettasi pertanto successivamente $h=1, 2, 3, 4, \ldots$, ciascuno dei numeri

$$2^k-2\,,\; 3^k-2^k-1\,,\; 4^k-3^k-1\,,\; 5^k-4^k-1\,, \ldots$$

avrà per fattore k. Lo stesso dunque dovrà asserirsi dei numeri

$$2^k-2\,,\; (2^k-2)+(3^k-2^k-1)\,,\; (2^k-2)+(3^k-2^k-1)+(4^k-3^k-1)\,,$$
$$(2^k-2)+(3^k-2^k-1)+(4^k-3^k-1)+(5^k-4^k-1)\,, \ldots,$$

i quali equivalgono a

$$2^k-2\,,\; 3^k-3\,,\; 4^k-4\,,\; 5^k-5\,, \ldots,$$

e generalmente di

$$N^k-N.$$

Ma $N^k-N=N\,(N^{k-1}-1)$. Adunque ove un numero intero N non contenga k come fattore, sarà certamente lo stesso k fattore del numero $N^{k-1}-1$.

128. Suppongasi ora che il numero intero N compongasi di n cifre rappresentate con $a, b, c, d, \ldots y, z$. Sarà sempre

$$N=10^{n-1}a+10^{n-2}b+10^{n-3}c+10^{n-4}d+\ldots+10y+z \ldots (\alpha).$$

Proposto per esempio il numero 76453542, poichè le sue cifre sono otto, sarà

$$76453542=10^7.7+10^6.6+10^5.4+10^4.5+10^3.3+10^2.5+10.4+2;$$

ed infatti

$$76453542=70000000+6000000+400000+50000+3000+500+40+2.$$

Ciò posto la formola (α) può scriversi come segue

$$N=(11-1)^{n-1}a+(11-1)^{n-2}b+(11-1)^{n-3}c+(11-1)^{n-4}d+\ldots(11-1)y+z;$$

ma (125)

$$(11-1)^{n-1}a=11^{n-1}a-\frac{n-1}{1}\,11^{n-2}a+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\,11^{n-3}a-\ldots\mp a,$$

$$(11-1)^{n-2}b=11^{n-2}b-\frac{n-2}{1}\,11^{n-3}b+\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}\,11^{n-4}b-\ldots\pm b,$$

---

mini del secondo membro sarebbero divisibili esattamente per k; tutto adunque questo secondo membro, ossia il numero $(h+1)^k-h^k-1$, non potrebbe contenere k come fattore. Ponendo per esempio $k=6$, sarebbe

$$(h+1)^6-h^6-1=6h^5+15h^4+20h^3+15h^2+6h,$$

in cui si vede che non tutt' i termini che si trovano nel secondo membro sono divisibili per 6.

$$(11-1)^{n-3}c=11^{n-3}c-\frac{n-3}{1}\,11^{n-4}c+\frac{(n-3)(n-4)}{1.2}\,11^{n-5}c-\ldots\mp c,$$

$$(11-1)^{n-4}d=11^{n-4}d-\frac{n-4}{1}\,11^{n-5}d+\frac{(n-4)(n-5)}{1.2}\,11^{n-6}d-\ldots\pm d,$$

ec. ec. . . . .

dove negli ultimi termini hanno luogo i segni superiori allorchè n è pari, gl' inferiori allorchè n è dispari; infatti gli sviluppi di $(11-1)^{n-1}a$, $(11-1)^{n-2}b$, $(11-1)^{n-3}c$, $(11-1)^{n-4}d$, ... dovendo contenere il primo n termini, il secondo $n-1$ termini, il terzo $n-2$ termini, il quarto $n-3$ termini, ec., e tutti i termini che nei medesimi sono in posto pari dovendo essere negativi, se n è pari, gli ultimi termini a, c, . . . del primo, terzo, ec . . . sviluppo ritrovandosi in posti pari saranno negativi, e gli ultimi termini, b, d, ... del secondo, quarto, ec. . . sviluppo ritrovandosi in posti dispari saranno positivi: accaderà il contrario se n sarà dispari. Rappresentando dunque con N' ed N'' due numeri interi, avremo per n pari

$$N=11N'-a+b-c+d-\ldots-y+z;$$

e per n dispari

$$N=11N''+a-b+c-d+\ldots-y+z.$$

Che però sommando le cifre 1ª, 3ª, 5ª,... e similmente le cifre 2ª, 4ª, 6ª,... del numero N, questo si dividerà certo per 11 quante volte la differenza fra l'una e l'altra somma risulti 0 uguale a zero ovvero divisibile per 11 esattamente. Così i numeri

2434520, 9781156

saranno divisibili esattamente per 11.

Se la formola (α) si scrivesse nel modo seguente

$$N=(9+1)^{n-1}a+(9+1)^{n-2}b+(9+1)^{n-3}c+(9+1)^{n-4}d+\ldots+(9+1)y+z;$$

poichè si hanno

$$(9+1)^{n-1}a=9^{n-1}a+\frac{n-1}{1}\,9^{n-2}a+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\,9^{n-3}a+\ldots+a,$$

$$(9+1)^{n-2}b=9^{n-2}b+\frac{n-2}{1}\,9^{n-3}b+\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}\,9^{n-4}b+\ldots+b,$$

$$(9+1)^{n-3}c=9^{n-3}c+\frac{n-3}{1}\,9^{n-4}c+\frac{(n-3)(n-4)}{1.2}\,9^{n-5}c+\ldots+c,$$

$$(9+1)^{n-4}d=9^{n-4}d+\frac{n-4}{1}\,9^{n-5}d+\frac{(n-4)(n-5)}{1.2}\,9^{n-6}d+\ldots+d,$$

ec. ec. . . . .

rappresentando N''' un numero intero, potrebbe porsi

$$N=9N'''+a+b+c+d+\ldots+y+z,$$

dalla quale espressione agevolmente si dedurrà quanto si dimostrò nell' Aritmetica (45), che cioè un numero, le cui cifre significative prese come tante unità danno una somma esattamente divisibile per 9, può sempre dividersi per 9.

Non riuscirà inutile l'indicare in questo luogo il metodo che si dovrà praticare quantunque volte si vorranno determinare tutti gli esatti divisori di un dato numero intero N, quei divisori cioè che nello stesso N si contengono senza residuo alcuno.

Fra i numeri primi 2, 3, 5, 7, 11, 13, . . . cerchisi il minimo divisore del numero N: cioè se N è pari dividasi per 2 (43); se dispari e non possa dividersi esattamente nè per 3 nè per 5 (44.45), si tenti la divisione per 7; quindi se neppure il 7 esattamente divide N, si osservi (128) se possa adoperarsi il divisore 11, e così di seguito. Trovato questo minimo divisore, notisi il corrispondente quoto, ed eseguendo la medesima operazione su questo quoto, si prosegua nella medesima guisa finchè ottengasi l' ultimo quoto$=1$. I divisori semplici, che in siffatta maniera operando si ottengono, si moltiplichino fra loro combinandoli due a due, tre a tre, quattro a quattro, ec. . . i prodotti che quindi risulteranno, saranno tutti gli altri divisori del numero proposto.

Sia $N=420$, saranno i suoi divisori semplici

$$2,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,$$

corrispondenti ai quozienti

$$210,\ 105,\ 35,\ 7,\ 1.$$

Ora i prodotti binarii di questi divisori sono

$$2.2=4,\ 2.3=6,\ 2.5=10,\ 2.7=14,\ 3.5=15,\ 3.7=21,\ 5.7=35,$$

ed i prodotti ternarii sono

$$2.2.3=12,\ 2.2.5=20,\ 2.2.7=28,\ 2.3.5=30,$$
$$2.3.7=42,\ 2.5.7=70,\ 3.5.7=105,$$

ed i quaternarii sono

$$2.2.3.5=60,\ 2.2.3.7=84,\ 2.2.5.7=140,\ 2.3.5.7=210,$$

ed infine il prodotto quinario è

$$2.2.3.5.7=420.$$

Perciò i divisori del dato numero 420 saranno i seguenti

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 10,\ 12,\ 14,\ 15,\ 20,\ 21,\ 28,$$
$$30,\ 35,\ 42,\ 60,\ 70,\ 84,\ 105,\ 140,\ 210,\ 420.$$

Nè potrebbe trovarsi alcun altro divisore, poichè se prendasi un numero primo diverso dai divisori 2, 3, 5, 7 che parimente sono numeri primi, esso non dividendo esattamente veruno di siffatti divisori, neppure potrà dividere il prodotto $2.2.3.5.7=420$.

Sia in secondo luogo $N=360$; i suoi divisori semplici sono

$$2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 5,$$

corrispondenti ai quozienti

$$180,\ 90,\ 45,\ 15,\ 5,\ 1.$$

Laonde i prodotti binarii di questi divisori saranno

$$2.2=4,\ 2.3=6,\ 3.3=9,\ 2.5=10,\ 3.5=15,$$

ed i prodotti ternarii

$$2.2.2=8,\ 2.2.3=12,\ 2.2.5=20,\ 2.3.3=18,\ 2.3.5=30,\ 3.3.5=45,$$

come ancora i prodotti quaternarii saranno

$$2.2.2.3=24,\ 2.2.2.5=40,\ 2.2.3.3=36,\ 2.2.3.5=60,\ 2.3.3.5=90,$$

ed i quinarii

$$2.2.2.3.3=72,\ 2.2.2.3.5=120,\ 2.2.3.3.5=180,$$

finalmente il prodotto di tutti e sei i divisori semplici sarà

$$2.2.2.3.3.5=360.$$

Adunque tutti i divisori del numero 360 saranno

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 15,\ 18,\ 20,$$
$$24,\ 30,\ 36,\ 40,\ 45,\ 60,\ 72,\ 90,\ 120,\ 180,\ 360.$$

129. L'uso delle formole (f_n), (f'_n) (124. 125) non è ristretto alle sole potenze di un binomio, esse sono applicabili alle potenze di un polinomio qualunque. Si abbia ad esempio il trinomio $a+b+c$ di cui cercasi la potenza n^{sima}; considerando il binomio $a+b$ come un sol termine, sarà

$$(a+b+c)^n=(a+b)^n+\frac{n}{1}(a+b)^{n-1}c+\frac{n(n-1)}{1.2}(a+b)^{n-2}c^2+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(a+b)^{n-3}c^3+\ldots$$

Ora

$$(a+b)^n=a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3+\ldots$$

$$(a+b)^{n-1}=a^{n-1}+\frac{n-1}{1}a^{n-2}b+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}a^{n-3}b^2+$$
$$+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}a^{n-4}b^3+\ldots$$

$$(a+b)^{n-2}=a^{n-2}+\frac{n-2}{1}a^{n-3}b+\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}a^{n-4}b^2+$$

$$+\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3}a^{n-5}b^3+\ldots$$

$$(a+b)^{n-3}=a^{n-3}+\frac{n-3}{1}a^{n-4}b+\frac{(n-3)(n-4)}{1.2}a^{n-5}b^2+$$

$$+\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3}a^{n-6}b^3+\ldots$$

ec. ec. . . . .

Adunque sostituendo si troverà

$$(a+b+c)^n=a^n-\frac{n}{1}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3+\ldots$$

$$+\frac{n}{1}\Big(a^{n-1}+\frac{n-1}{1}a^{n-2}b+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}a^{n-3}b^2+$$

$$+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}a^{n-4}b^3+\ldots\ldots\Big)c+$$

$$+\frac{n(n-1)}{1.2}\Big(a^{n-2}+\frac{n-2}{1}a^{n-3}b+\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}a^{n-4}b^2+$$

$$+\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3}a^{n-5}b^3+\ldots\Big)c^2+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Big(a^{n-3}+\frac{n-3}{1}a^{n-4}b+\frac{(n-3)(n-4)}{1.2}a^{n-5}b^2+$$

$$+\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3}a^{n-6}b^3+\ldots\Big)c^3+$$

$+$ ec. . . . . . .

Con l'istesso metodo otterremo la potenza n^{sima} del quadrinomio $a+b+c+d$, considerando cioè il trinomio $a+b+c$ come un sol termine. Infatti

$$(a+b+c+d)^n=(a+b+c)^n+\frac{n}{1}(a+b+c)^{n-1}d+$$

$$+\frac{n(n-1)}{1.2}(a+b+c)^{n-2}d^2+\ldots$$

Sostituendo in questa formola i valori di $(a+b+c)^n$, $(a+b+c)^{n-1}$, $(a+b+c)^{n-2}$,... trovati sopra, risulterà la dimandata potenza $(a+b+c+d)^n$. In somigliante guisa si condurrà il calcolo per elevare ad una potenza data un polinomio qualunque. Mettasi $n=2,=3,..$ si avranno

$$(a+b+c)^2=(a+b)^2+\frac{2}{1}(a+b)c+c^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc,$$

$$(a+b+c)^3=(a+b)^3+\frac{3}{1}(a+b)^2c+\frac{3.2}{1.2}(a+b)c^2+c^3=a^3+b^3+c^3+$$

$$+3a^2b+3a^2c+3ab^2+3b^2c+3ac^2+3bc^2+6abc.$$

ec. . . . .

$$(a+b+c+d)^2=(a+b+c)^2+\frac{2}{1}(a+b+c)d+d^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+$$

$$+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd.$$

ec. . . . .

130. Si divida la unità per $a+b$ nel modo che qui si scorge

$$a+b \mid 1 \qquad \mid \frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\dots$$

$$1+\frac{b}{a}$$

$$-\frac{b}{a}$$

$$-\frac{b}{a}-\frac{b^2}{a^2}$$

$$\frac{b^2}{a^2}$$

$$\frac{b^2}{a^2}+\frac{b^3}{a^3}$$

$$-\frac{b^3}{a^3}$$

$$-\frac{b^3}{a^3}-\frac{b^4}{a^4}$$

$$\frac{b^4}{a^4}$$

ec. . . . . . .

Quindi ricaviamo (91)

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{\frac{b}{a}}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+b}\cdot\frac{b}{a},$$

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{1}{a+b}\cdot\frac{b^2}{a^2},$$

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{1}{a+b}\cdot\frac{b^3}{a^3}, \ldots$$

e generalmente

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \ldots \pm \frac{b^{n-1}}{a^n} \mp \frac{1}{a+b}\cdot\frac{b^n}{a^n};$$

valgono i segni superiori quando n è dispari, e gl' inferiori quando n è pari. Ora se il valore di $\frac{b}{a}$ è < 1, crescendo n oltre qualunque dato numero quanto si voglia grande, il termine

$$\mp \frac{1}{a+b}\cdot\frac{b^n}{a^n} \ldots (\rho)$$

decrescerà per modo che si approssimerà sempre più a zero; ma ciò conduce il polinomio

$$\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \ldots \pm \frac{b^{n-1}}{a^n}$$

ad appressarsi continnamente alla quantità fissa

$$\frac{1}{a+b} \ldots (\varsigma);$$

questa dunque equivarrà alla serie

$$\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \ldots (s)$$

protratta all' infinito, in guisa che veramente potrà scriversi

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \ldots (s')$$

riguardando il termine (ρ) come annullato nel suo limite.

Delle due quantità (ς), (ρ) la prima dicesi la somma della serie (s), l' altra il suo residuo dopo il termine n^{simo}.

Che se il valore di $\frac{b}{a}$ sia $=$ ovvero > 1, al certo crescendo n il residuo (ρ) o persisterà costante, o diventerà continuamente maggiore; che però ove non abbiasi riguardo al residuo (ρ), nè la (σ) rappresenterà la (s), nè varrà quindi la (s').

131. Poichè dunque la equazione

$$\frac{1}{a+b}=(a+b)^{-1}=\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\ldots$$

ha luogo per tutti i valori di $\frac{b}{a}$ compresi fra i limiti $+1$ e -1, si potrà certamente fra i medesimi limiti estendere

$$((a+b)^{-1})^n=(a+b)^{-n}=\left(\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\ldots\right)^n=$$

$$=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a}\left(\frac{b}{a}-\frac{b^2}{a^2}+\frac{b^3}{a^3}-\ldots\ldots\right)\right)^n=$$

$$=\frac{1}{a^n}\left(1-\frac{b}{a}\left(1-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}-\ldots\ldots\ldots\right)\right)^n=$$

$$=\frac{1}{a^n}\left(1-\frac{n}{1}\cdot\frac{b}{a}\left(1-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}-\ldots\ldots\ldots\ldots\right)+\right.$$

$$+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{b^2}{a^2}\left(1-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}-\ldots\ldots\ldots\right)^2-$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{b^3}{a^3}\left(1-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}-\ldots\ldots\right)^3+$$

$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\cdot\frac{b^4}{a^4}\left(1-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}-\ldots\right)^4-\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{a^n}\left(1-\frac{n}{1}\cdot\frac{b}{a}\left(1-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^3}{a^3}+\ldots\ldots\right)+\right.$$

$$+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{b^2}{a^2}\left(1-2\,\frac{b}{a}+3\,\frac{b^2}{a^2}-\ldots\ldots\right)-$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{b^3}{a^3}\left(1-3\,\frac{b}{a}+\ldots\ldots\right)+$$

$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\cdot\frac{b^4}{a^4}\left(1-\ldots\ldots\ldots\right)-\ldots\right)=$$

$$= \frac{1}{a^n}\Big(1 - \frac{n}{1}\cdot\frac{b}{a} + \frac{n}{1}\cdot\frac{b^2}{a^2} - \frac{n}{1}\cdot\frac{b^3}{a^3} + \frac{n}{1}\cdot\frac{b^4}{a^4} - \text{ec.}..$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{b^2}{a^2} - \frac{2n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{b^3}{a^3} + \frac{3n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{b^4}{a^4} - \text{ec.}..$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{b^3}{a^3} + \frac{3n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{b^4}{a^4} - \text{ec.}..$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\cdot\frac{b^4}{a^4} - \text{ec.} \ldots$$

$$- \text{ec.} \ldots\ldots\ldots \Big).$$

Or noi abbiamo

$$\frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} = \frac{2n}{1.2} + \frac{n^2-n}{1.2} = \frac{n^2+n}{1.2} = \frac{n(n+1)}{1.2},$$

$$\frac{n}{1} + \frac{2n(n-1)}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} = \frac{6n}{1.2.3} + \frac{6n^2-6n}{1.2.3} + \frac{n^3-3n^2+2n}{1.2.3} =$$

$$= \frac{n^3+3n^2+2n}{1.2.3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3},$$

$$\frac{n}{1} + \frac{3n(n-1)}{1.2} + \frac{3n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} =$$

$$= \frac{24n}{1.2.3.4} + \frac{36n^2-36n}{1.2.3.4} + \frac{12n^3-36n^2+24n}{1.2.3.4} + \frac{n^4-6n^3+11n^2-6n}{1.2.3.4} =$$

$$= \frac{n^4+6n^3+11n^2+6n}{1.2.3.4} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4},$$

ec. . . . ec. . . .

Adunque

$$(a+b)^{-n} = \frac{1}{a^n}\Big(1 - \frac{n}{1}\cdot\frac{b}{a} + \frac{n(n+1)}{1.2}\cdot\frac{b^2}{a^2} - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\cdot\frac{b^3}{a^3} +$$

$$+ \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}\cdot\frac{b^4}{a^4} - \ldots\Big),$$

e quindi (105)

$$(a+b)^{-n}=a^{-n}+\frac{-n}{1}a^{-n-1}b+\frac{-n(-n-1)}{1.2}a^{-n-2}b^2+$$
$$+\frac{-n(-n-1)(-n-2)}{1.2.3}a^{-n-3}b^3+\frac{-n(-n-1)(-n-2)(-n-3)}{1.2.3.4}a^{-n-4}b^4+\ldots,$$

$$(a-b)^{-n}=a^{-n}-\frac{-n}{1}a^{-n-1}b+\frac{-n(-n-1)}{1.2}a^{-n-2}b^2-$$
$$-\frac{-n(-n-1)(-n-2)}{1.2.3}a^{-n-3}b^3+\frac{-n(-n-1)(-n-2)(-n-3)}{1.2.3.4}a^{-n-4}b^4-\ldots;$$

varranno cioè le formole (f_n) ed (f'_n), fra i limiti accennati sopra, anche per gli esponenti interi e negativi. Lo stesso si dimostrerà altrove rispetto agli esponenti fratti, positivi o negativi che sieno.

132. Rimane a dire alcuna cosa intorno al metodo di estrarre una radice qualunque da una data quantità polinomia. Questo metodo si raccoglie agevolmente dalla stessa formazione delle potenze dei polinomii (123. 124. 125. 129). Ed infatti per cominciare dalla radice quadrata, siccome la quantità $a^2+2ab+b^2$ è il quadrato della radice $a+b$, è chiaro che otterremo questa radice, allorchè ci è incognita, se estraendo la radice quadrata dal primo termine a^2, la quale è a, pel doppio di essa, ossia per $2a$, divideremo il secondo termine $2ab$, poichè il quoziente b di questa divisione sarà l'altro termine della radice.

Ciò presupposto debba estrarsi la radice quadrata dal polinomio $60ab+$ $+36a^2+25b^2$. Ordinando questa quantità per a come segue

$$\begin{array}{l|l}
36a^2+60ab+25b^2 & 6a+5b \\
36a^2 & \\
\hline
\quad 60ab+25b^2 & \\
\quad 60ab+25b^2 & \\
\hline
\quad 0 &
\end{array}$$

estraggasi la radice quadrata dal primo termine $36a^2$, si avrà $\sqrt{36a^2}=6a$ primo termine della cercata radice. Notisi questo primo termine a parte, quindi se ne formi il quadrato, e questo si sottragga dalla quantità proposta; sarà $60ab+25b^2$ il residuo. Il primo termine $60ab$ di questo residuo si divida pel doppio del termine trovato $6a$, il quoto sarà $5b$, che si noterà a canto allo stesso $6a$ pel secondo termine della radice che si domanda. A fine poi di assicurarsi che $6a+5b$ è la radice che si domanda, dovrà sottrarsi $(6a+5b)^2$ dalla quantità proposta, ovvero $(6a+5b)^2-36a^2=5b(12a+5b)$ dal residuo, perchè $36a^2$ fu già sottratto: eseguendo questa sottrazione, siccome nulla rimane, la radice cercata sarà certamente $6a+5b$.

133. Propongasi per secondo esempio la quantità $a^4+2a^3b+a^2b^2+2a^2c+$ $+2abc+c^2$ da cui si voglia estrarre la radice quadrata. Posto che questa quan-

tità si faccia rimanere ordinata per a, la operazione procederà nel modo che qui si vede

$$\begin{array}{l|l} a^4+2a^3b+a^2b^2+2a^2c+2abc+c^2 & a^2+ab+c \\ a^4 & \\ \hline \quad 2a^3b+a^2b^2+2a^2c+2abc+c^2 & \\ \quad 2a^3b+a^2b^2 & \\ \hline \qquad 2a^2c+2abc+c^2 & \\ \qquad 2a^2c+2abc+c^2 & \\ \hline \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Avendo cioè nel modo già detto sopra trovato a^2+ab per i due primi termini della cercata radice, sottraendo $(a^2+ab)^2$ dal proposto polinomio, ovvero $(a^2+ab)^2-a^4=ab\,(2a^2+ab)$ dal primo residuo, non si ottiene zero pel secondo residuo ma $2a^2c+2abc+c^2$, ciò che indica che la radice non risulta di due termini soltanto. Laonde (129) si otterrà il terzo termine dividendo il primo $2a^2c$ del secondo residuo pel doppio di a^2 primo termine della parte già trovata a^2+ab, e scrivendo in radice il quoto c. Di nuovo sottraendo dalla quantità proposta la radice a^2+ab+c innalzata al quadrato, ovvero $(a^2+ab+c)^2-$ $-(a^2+ab)^2=c(2a^2+2ab+c)$ dal secondo residuo, siccome nulla rimane, sarà a^2+ab+c la radice cercata.

134. In generale adunque *per estrarre la radice quadrata da un dato polinomio* (p), *si dovrà anzi ogni altra operazione ordinare questo in modo che il primo suo termine sia un quadrato esatto, e quindi seguano gli altri termini disposti con ordine tale che le potenze delle lettere che si trovano nel primo vadano diminuendo fino all' ultimo. Ciò posto dal primo termine se ne estrarrà la radice quadrata, che si porrà alla destra di* (p); *esprimerà questa il primo termine della cercata radice. Sottraendo in seguito il quadrato di questo primo termine dal polinomio* (p), *dividasi il primo termine del risultante residuo* (r_1) *pel doppio del primo termine della radice; il quoziente che si otterrà, dinoterà il secondo termine della medesima. Aggiungasi quindi al doppio del primo termine della radice il secondo termine della medesima col proprio segno, e la somma che ne risulta moltiplichisi per lo stesso secondo termine; ove il prodotto risulti uguale al residuo* (r_1), *in modo che sottratto dal medesimo nulla rimanga, la radice sarà composta dei soli due termini finora trovati. Ottenendosi però da questa ultima sottrazione un secondo residuo* (r_2), *si dividerà il suo primo termine pel doppio del primo termine della parte già trovata della radice; il quoziente esprimerà il terzo termine della radice medesima: e questo sarà eziandio l' ultimo ove aggiugnendolo col proprio segno al doppio dei due primi termini, il prodotto di questa somma pel medesimo terzo termine riesca uguale al residuo* (r_2). *Che se nascesse un terzo residuo* (r_3), *si otterrebbe* (129) *con lo stesso metodo il quarto termine della radice, mediante i tre termini già trovati, e così di seguito.*

Eccone un terzo esempio

$$
\begin{array}{lll}
(p) & 1+z & \Big|\; 1+\frac{z}{2}-\frac{z^2}{2^3}+\frac{z^3}{2^4}-\frac{5z^4}{2^7}+\frac{7z^5}{2^8}-\ldots\ldots \\
 & & \underline{1} \\
(r_1) & & z \\
 & & \underline{z+\frac{z^2}{2^2}} \\
(r_2) & & -\frac{z^2}{2^2} \\
 & & \underline{-\frac{z^2}{2^2}-\frac{z^3}{2^3}+\frac{z^4}{2^6}} \\
(r_3) & & \frac{z^3}{2^3}-\frac{z^4}{2^6} \\
 & & \underline{\frac{z^3}{2^3}+\frac{z^4}{2^4}-\frac{z^5}{2^6}+\frac{z^6}{2^8}} \\
(r_4) & & -\frac{5z^4}{2^6}+\frac{z^5}{2^6}-\frac{z^6}{2^8} \\
 & & \underline{-\frac{5z^4}{2^6}-\frac{5z^5}{2^7}+\frac{5z^6}{2^9}-\frac{5z^7}{2^{10}}+\frac{25z^8}{2^{14}}} \\
(r_5) & & \frac{7z^5}{2^7}-\frac{7z^6}{2^9}+\frac{5z^7}{2^{10}}-\frac{25z^8}{2^{14}} \\
 & & \text{ec.} \;\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

In questo esempio la operazione si continua all' infinito : e poichè

$$(1+z)-1^2=(r_1)\,,$$

$$(1+z)-\left(1+\frac{z}{2}\right)^2=(r_2)\,,$$

$$(1+z)-\left(1+\frac{z}{2}-\frac{z^2}{2^3}\right)^2=(r_3)\,,$$

$$(1+z)-\left(1+\frac{z}{2}-\frac{z^2}{2^3}+\frac{z^3}{2^4}\right)^2=(r_4)\,,$$

$$(1+z)-\left(1+\frac{z}{2}-\frac{z^2}{2^3}+\frac{z^3}{2^4}-\frac{5z^4}{2^7}\right)^2=(r_5)\,,$$

ec. . . . ec. . . . .

perciò se i residui (r_1), (r_2), (r_3), (r_4), (r_5), . . . decrescono per modo che

(r_n), crescendo n oltre qualunque dato numero quanto si voglia grande, sempre più si accosti a zero, sarà nel limite (130)

$$(1+z)-\left(1+\frac{z}{2}-\frac{z^2}{2^3}+\frac{z^3}{2^4}-\frac{5z^4}{2^7}+\frac{7z^5}{2^8}-\ldots\right)^2=0,$$

ovvero

$$1+z=\left(1+\frac{z}{2}-\frac{z^2}{2^3}+\frac{z^3}{2^4}-\frac{5z^4}{2^7}+\frac{7z^5}{2^8}-\ldots\right)^2$$

donde

$$\sqrt{1+z}=1+\frac{z}{2}-\frac{z^2}{2^3}+\frac{z^3}{2^4}-\frac{5z^4}{2^7}+\frac{7z^5}{2^8}-\ldots$$

135. Essendo $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ il cubo della radice $a+b$, chiaro apparisce che si otterrà questa radice, quante volte non si conosca, estraendo dal primo termine a^3 la radice cubica, la quale è a, e pel triplo quadrato di a dividendo il secondo termine $3a^2b$, giacchè il quoziente sarà b, cioè il secondo termine della radice.

Propongasi ad esempio di estrarre la radice cubica dalla quantità polinomia $54a^2bm^2n^4-27m^3n^6+8a^6b^3-36a^4b^2mn^2$. Ordinando questa per a, la operazione si eseguirà nel modo che quì si vede

$$\begin{array}{l|l}
8a^6b^3-36a^4b^2mn^2+54a^2bm^2n^4-27m^3n^6 & 2a^2b-3mn^2 \\
8a^6b^3 & \\
\hline
\quad -36a^4b^2mn^2+54a^2bm^2n^4-27m^3n^6 & \\
\quad -36a^4b^2mn^2+54a^2bm^2n^4-27m^3n^6 & \\
\hline
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Estraendo cioè dal primo termine $8a^6b^3$ la radice cubica, si avrà il primo termine $\sqrt[3]{8a^6b^3}=2a^2b$ della cercata radice; sottraendo il cubo di questo primo termine dal polinomio dato, resterà $-36a^4b^2mn^2+54a^2bm^2n^4-27m^3n^6$. Dividendo quindi il primo termine di questo residuo pel triplo quadrato di $2a^2b$, si otterrà il secondo termine della radice $=\dfrac{-36a^4b^2mn^2}{12a^4b^2}=-3mn^2$. Ciò posto il prodotto del triplo quadrato di $2a^2b$ per $-3mn^2$ è $-36a^4b^2mn^2$, il prodotto del triplo di $2a^2b$ pel quadrato di $-3mn^2$ è $54a^2bm^2n^4$, il cubo di $-3mn^2$ è $-27m^3n^6$; e poichè sottratti tutti questi termini dal residuo nulla rimane, la radice cercata sarà $2a^2b-3mn^2$.

136. Dovendosi in secondo luogo trovare la radice cubica del polinomio $8a^6+36a^4b-12a^4c+54a^2b^2-36a^2bc+6a^2c^2+27b^3-27b^2c+9bc^2-c^3$, la

operazione si disporrà come segue

$$
\begin{array}{l}
8a^6+36a^4b-12a^4c+54a^2b^2-36a^2bc+6a^2c^2+27b^3-27b^2c+9bc^2-c^3 \,|\, 2a^2+3b-c \\
8a^6 \\
\hline
\quad 36a^4b-12a^4c+54a^2b^2-36a^2bc+6a^2c^2+27b^3-27b^2c+9bc^2-c^3 \\
\quad 36a^4b \qquad +54a^2b^2 \qquad\qquad\qquad +27b^3 \\
\hline
\qquad -12a^4c \qquad -36a^2bc+6a^2c^2 \qquad -27b^2c+9bc^2-c^3 \\
\qquad -12a^4c \qquad -36o^2bc+6a^2c^2 \qquad -27b^2c+9bc^2-c^3 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Dopo cioè di aver trovato i due primi termini della radice nel modo già sopra indicato, dividendo il primo termine del residuo $-12a^4c-36a^2bc+6a^2c^2-$ $-27b^2c+9bc^2-c^3$ pel triplo del quadrato di $2a^2$, si avrà $-c$ pel terzo termine della medesima radice (129). Posto ciò il triplo prodotto di $(2a^2+3b)^2$ per $-c$ è $-12a^4c-36a^2bc-27b^2c$, il triplo prodotto di $2a^2+3b$ per c^2 è $6a^2c^2+9bc^2$, il cubo di $-c$ è $-c^3$, e tutte queste quantità sottratte dal secondo residuo danno zero pel terzo residuo. Adunque la radice sarà $2a^2+3b-c$.

137. In generale *allorchè da un dato polinomio* (p) *si vuol estrarre la radice cubica, si ordinerà esso in modo che il primo termine sia un perfetto cubo, e negli altri vi sieno le potenze delle lettere che si trovano nel primo talmente disposte che vadano sempre diminuendo fino all' ultimo. Dal primo termine di* (p) *così ordinato se ne estrarrà la radice cubica, la quale sarà il primo termine della radice che si domanda. Sottraendo da* (p) *il cubo del termine già trovato, dividasi il primo termine del risultante residuo* (r_1) *pel triplo quadrato del termine già trovato, il quoziente sarà il secondo termine della radice. Or se sottraendo da* (r_1) *il prodotto del triplo quadrato del primo termine nel secondo, il prodotto del triplo del primo nel quadrato del secondo termine, ed il cubo dello stesso secondo termine, nulla resti, la radice si comporrà dei soli due termini trovati. Ottenendosi però un secondo residuo* (r_2), *il primo suo termine si dividerà pel triplo quadrato del primo termine della radice, ed il quoziente esprimerà il terzo termine della medesima. Questo terzo termine poi sarà altresì l' ultimo* (129) *quante volte sottraendo da* (r_2) *il prodotto del triplo quadrato dei due primi termini nel terzo, il prodotto del triplo dei due primi termini nel quadrato del terzo, ed il cubo del terzo termine, si abbia zero. Che se da questa seconda sottrazione risultasse un residuo* (r_3) *si procederebbe nella stessa maniera a fine di determinare gli altri termini della radice.*

138. Non di altro fa d' uopo perchè s' intenda in qual modo debbano estrarsi le radici 4^a, 5^a, ec. . . dai polinomii. Generalmente *troveremo il primo termine della radice* n^{sima} *estraendo la radice medesima dal primo termine del polinomio, poi continueremo la operazione moltiplicando per* n *la potenza* $(n-1)^{sima}$ *del primo termine già trovato della radice, e dividendo per questo prodotto il primo termine di ciascun residuo; che però espressa con* H *la parte della radice avanti ottenuta e con* K *il nuovo termine della medesima rappresentato dal quoziente risultante da quella divisione, dovrà sottrarsi da quello stesso residuo* (129)

il polinomio

$$nH^{n-1}K+\frac{n(n-1)}{2}H^{n-2}K^2+\ldots\ldots+K^n.$$

CAPO VI.

DEL MODO DI ESTRARRE LE RADICI DAI NUMERI.

139. Il metodo che si adopera per estrarre le radici dalle quantità algebriche riesce del pari applicabile ai numeri (*). Per lo che si supponga il numero intero M composi di m cifre. Poichè (128) 10^m è il minimo di tutti i numeri interi che si compongono di $m+1$ cifre, e 10^{m-1} è il minimo di tutti i numeri interi che hanno m cifre, perciò il numero delle cifre di cui si compone la potenza M^n nè giungerà al numero delle cifre di cui si compone 10^{mn}, nè potrà essere minore del numero delle cifre di cui si compone $10^{(m-1)n}$: Ma 10^{mn} è il minimo degl' interi che hanno $mn+1$ cifre, e $10^{(m-1)n}$ è il minimo degl' interi che hanno $(m-1)n+1$ cifre; adunque le cifre di M^n nè saranno più di mn nè meno di $(m-1)n+1$. Dividendosi quindi le cifre di M^n, cominciando da quella delle unità, in classi di cui ciascuna ne contenga n, lasciando alla ultima classe a sinistra le cifre che avanzano, sieno pur queste di numero uguali o minori di n, si otterranno al certo m classi, tante cioè quante sono le cifre di M. Conseguita dal detto che dato un numero intero P, da cui cercasi estrarre la radice n^{sima}, se cominciando dalle unità dividasi P in classi di cui ciascuna abbia n cifre, lasciando alla ultima classe quelle che avanzano, e si ottengano k classi, tante senza dubbio alcuno saranno le cifre della cercata radice, quante unità si contengono in k. Così per esempio del numero 187388721 la radice quadrata si comporrà di cinque cifre, la cubica di tre, la quarta anche di tre, ec. . . Infatti dovendosi da quel numero estrarre la radice quadrata, il medesimo si dividerà a questo modo 1, 87, 38, 87, 21; dovendosi estrarre la radice cubica si dividerà come segue 187, 388, 721; e volendosi estrarre la radice quarta si dividerà così 1, 8738, 8721; ec.

140. Riguardando adunque le sole cifre intere, e queste rappresentando con $a, b, c, \ldots\ldots z$, si avrà (128)

$$\sqrt[n]{P}=10^{k-1}a+10^{k-2}b+10^{k-3}c+\ldots\ldots+z.$$

(*) Se vi ha autore che nell' assegnare il metodo di estrarre le radici dai numeri meglio accoppiasse a squisita eleganza ampia generalità, egli è a mio credere il nostro P. Caraffa. E certamente nel leggere parecchi altri autori di Aritmetica e di Algebra non ho saputo rinvenire chi a lui in ciò potesse andare del pari: quindi a non defraudare di sì bel trattato i giovani studiosi, cui indirizzo in ispezialtà il mio lavoro, non fo che tener dietro in questa parte alle orme del lodato Autore, promettendo loro da qualche mia dilucidazione aggiunta, e molto più dalla viva voce del Precettore, che abbia a scemare in parte ogni qualunque difficoltà che senza dubbio qui proveranno maggiore, che nei precedenti trattati, la quale per altro deriva dalla generalità stessa, con cui vien esposta siffatta materia.

Inoltre

$$(10^{k-1}a)^n = a^n \,.\, 10^{(k-1)n}\,;$$

$$n(10^{k-1}a)^{n-1} \,.\, 10^{k-2}b = na^{n-1}b \,.\, 10^{(k-1)(n-1)+k-2} = na^{n-1}b \,.\, 10^{(k-1)n-1}\,;$$

$$(10^{k-1}a+10^{k-2}b)^n = ((10a+b) \,.\, 10^{k-2})^n = (10a+b)^n \,.\, 10^{(k-2)n}\,;$$

$$n(10^{k-1}a+10^{k-2}b)^{n-1} \,.\, 10^{k-3}c = n(10a+b)^{n-1}c \,.\, 10^{(k-2)(n-1)+k-3} =$$

$$= n(10a+b)^{n-1}c \,.\, 10^{(k-2)n-1}\,;$$

$$(10^{k-1}a+10^{k-2}b+10^{k-3}c)^n = ((10^2a+10b+c) \,.\, 10^{k-3})^n =$$

$$= (10^2a+10b+c)^n \,.\, 10^{(k-3)n}\,;$$

$$n(10^{k-1}a+10^{k-2}b+10^{k-3}c)^{n-1} \,.\, 10^{k-4}d =$$

$$= n(10^2a+10b+c)^{n-1}d \,.\, 10^{(k-3)(n-1)+k-4} =$$

$$= n(10^2a+10b+c)^{n-1}d \,.\, 10^{(k-3)n-1}\,;$$

$$(10^{k-1}a+10^{k-2}b+10^{k-3}c+10^{k-4}d)^n = ((10^3a+10^2b+10c+d) \,.\, 10^{k-4})^n =$$

$$= (10^3a+10^2b+10c+d)^n \,.\, 10^{(k-4)n}\,;$$

$$n(10^{k-1}a+10^{k-2}b+10^{k-3}c+10^{k-4}d)^{n-1} \,.\, 10^{k-5}e =$$

$$= n(10^3a+10^2b+10c+d)^{n-1}e \,.\, 10^{(k-4)(n-1)+k-5} =$$

$$= n(10^3a+10^2b+10c+d)^{n-1}e \,.\, 10^{(k-4)n-1}\,;$$

ec. . . . . ec. . . . . .

Da siffatte formole conseguitano i seguenti teoremi.

1.° *La potenza* n^sima^ *della prima cifra* a *della radice* n^sima^ *da estrarsi dal numero* P *è tutta compresa nella ultima classe a sinistra dello stesso* P. Infatti dalla prima formola è chiaro che la potenza n^{sima} della prima cifra a vale a^n con un seguito di $(k-1)n$ zeri, i quali occupando $k-1$ classi del numero P, mostrano che a^n è tutta compresa nella ultima classe a sinistra dello stesso P.

2.° *Il prodotto della potenza* (n—1)^sima^ *della medesima cifra* a *per* n *e per la seconda cifra* b *della radice non oltrepassa in* P *la prima cifra della seconda classe, a contare da sinistra.* Perocchè dalla seconda formola quel prodotto vale $na^{n-1}b \,.\, 10^{(k-1)n-1}$, vale cioè $na^{n-1}b$ seguito da tanti zeri quante unità si comprendono in $(k-1)n-1$; or il numero di questi zeri occupa $k-1$ classi di P meno la ultima cifra della ultima di queste classi che corrisponde alla prima cifra della seconda classe, a contare da sinistra. Dunque il prodotto $na^{n-1}b$ non oltrepassa in P la prima cifra della seconda classe a contare da sinistra.

3.° *La potenza* n^sima^ *della parte della radice* n^sima^ *di* P *composta*

dalle due prime cifre a, b, *la quale è* 10a+b, *non va oltre la seconda classe, cominciando dalla sinistra dello stesso* P. Per verità quella potenza dalla terza formola ha il valore di $(10a+b)^n . 10^{(k-2)n}$, equivale cioè a $(10a+b)^n$ con un seguito di $(k-2)n$ zeri: ma questi zeri occupano $k-2$ classi di P; sarà dunque la potenza $(10a+b)^n$ compresa tutta nelle due ultime classi a sinistra di P, non va cioè $(10a+b)^n$ oltre la seconda classe, cominciando a contare dalla sinistra del medesimo P.

4.° *Il prodotto della potenza* $(n-1)^{sima}$ *della parte* 10a+b *per* n *e per la terza cifra* c *della radice non si estende in* P *oltre la prima cifra della terza classe, a contare da sinistra.* Infatti dalla quarta formola è manifesto che il succennato prodotto equivale ad $n(10a+b)^{n-1}c . 10^{(k-2)n-1}$, equivale cioè a $n(10a+b)^{n-1}c$ seguito da $(k-2)n-1$ zeri, che occupano $k-2$ classi di P meno la ultima cifra della ultima di queste classi che corrisponde alla prima cifra della terza classe, posto che si cominci a contare da sinistra. Dunque il prodotto $n(10a+b)^{n-1}c$ non si estende in P oltre la prima cifra della terza classe, cominciando a contare da sinistra.

5.° *La potenza* n^{sima} *della parte della radice* n^{sima} *di* P *composta dalle tre cifre* a, b, c, *la quale è* $10^2a+10b+c$, *non oltrepassa la terza classe, cominciando a contare dalla sinistra.*

ec. ec. . . . .

141. Conoscendo le potenze delle nove cifre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, si otterrà subito la prima cifra a della radice n^{sima} da estrarsi dal numero P; poichè (140. 1.°) la potenza a^n o costituisce la classe ultima a sinistra dello stesso P, o è la massima fra le potenze n^{sime} d'interi, le quali contengonsi in quella classe. Le rimanenti cifre b, c, d, e, ... si ottengono manifestamente con lo stesso metodo che indicammo sopra (138); purchè le divisioni e le corrispondenti sottrazioni si eseguiscano solamente nelle debite cifre dei residui, come si rileva dai teoremi dimostrati nel numero precedente.

E qui dovrà avvertirsi quello stesso che si osservò già nell'Aritmetica (33. 35. 2.°) trattando della divisione: se la potenza $(n-1)^{sima}$ della radice già ottenuta moltiplicata per n porgerà un prodotto maggiore del numero che per esso deve dividersi, sarà =0 la corrispondente cifra della radice.

142. Facendo $P'=P . 10^{hn}$; sarà $P=\frac{P'}{10^{hn}}$; donde (114) $\sqrt[n]{P}=\frac{\sqrt[n]{P'}}{10^h}$.

Quante volte cioè dalla ultima sottrazione si ottenga un residuo, potrà, mediante una opportuna giunta di zeri, continuarsi la operazione in decimali quanto si vorrà, e la stessa $\sqrt[n]{P}$ risulterà di k cifre intere e di h decimali.

Che se si supponga il numero P da cui si deve estrarre la radice n^{sima} oltre le k classi di cifre intere avere ancora delle cifre decimali, certamente il numero di queste si potrà, salvo il valore, aumentare con aggiugnere degli zeri (55) se faccia d'uopo per ridurlo ad rn; soppressa quindi la virgola si convertirà P in un intero Q di $k+r$ classi: saranno adunque $k+r$ le cifre intere di $\sqrt[n]{Q}$, e poichè $P=\frac{Q}{10^{rn}}$, perciò (114) $\sqrt[n]{P}=\frac{\sqrt[n]{Q}}{10^r}$. Cioè (55) le r cifre a destra in $\sqrt[n]{Q}$ porgeranno altrettante cifre decimali in $\sqrt[n]{P}$.

143. Premesse siffatte cose è manifesto in qual modo debba condursi la operazione o perchè nulla resti in fine della medesima, ogni volta che la radice possa esattamente ottenersi, o perchè, ove la radice non possa ottenersi esattamente, resti un numero decrescente all' infinito, progredendosi sempre più verso il vero valore della radice. Veniamo agli esempii.

1.° Sia $n=2$, $P=324$, e perciò $k=2$. Avendo riguardo alle sole cifre intere, sarà (140)

$$\sqrt{324}=10a+b.$$

Per trovare poi le due cifre a e b la operazione si disporrà come segue

```
3, 2 4 | 18
1
----
  2 2,4
  2 2 4
  -----
      0
```

Essendo cioè $=1$ il quadrato che si contiene nella seconda classe a sinistra, sarà $a^2=1$ e quindi $a=1$. Sottraendo $a^2(=1)$ da quella classe, resta 2, a cui unendo la prima cifra 2 della prima classe a destra, risulterà il numero 22, in cui (140. 2.°) contiensi il prodotto $2ab$. Per ottenere dunque b dividasi 22 per $2a(=2)$: ma non potrà b essere uguale nè a 11 nè a 10, anzi non si potrà prendere neppure $b=9$, perchè $b(2.10a+b)=9(2.10+9)=261>224$ da cui (140. 3.°) si deve sottrarre $b(2.10a+b)$; e poichè preso il numero prossimamente minore 8, si ha $b(2.10+b)=8(2.10+8)=224$ non maggiore di quello da cui si deve sottrarre, dovrà perciò essere $b=8$. Compiuta la sottrazione nulla resta, e quindi sarà

$$\sqrt{324}=10.1+8=18.$$

2.° Rimanendo $n=2$, pongasi $P=56169$, sarà $k=3$; e però avendo riguardo alle sole cifre intere, avremo

$$\sqrt{56169}=10^2a+10b+c.$$

Per trovare a, b, c dispongasi la operazione così

```
5,6 1,6 9 | 237
4
----
1 6,1
1 2 9
------
  3 2 6,9
  3 2 6 9
  -------
        0
```

Essendo cioè 4 la massima potenza d'interi fra quelle che sono di secondo grado e si contengono nella ultima classe a sinistra, sarà $a^2=4$, donde $a=2$. Sottratto $a^2(=4)$ da quella classe resta 1, a cui appressando la prima cifra 6 della classe prossima seguente, otterremo 16 da dividersi per $2a(=4)$ a fine di avere b: ma non può essere $b=\frac{16}{4}=4$, poichè risulta $b(2.10a+b)=4(2.10.2+4)=176>161$; preso poi il numero prossimamente minore 3 riesce $b(2.10a+b)=3(2.10.2+3)=129<161$, sarà quindi $b=3$. Sottraendo adunque 129 da 161 il residuo è 32 a cui unendo la prima cifra 6 della terza classe, si otterrà il numero 326, il quale (140.4.°) contenendo il prodotto $2(10a+b)c=46c$, dovrà dividersi per 46 onde ottenere c. Il quoto 7 dà $c(2.10^2a+2.10b+c)=3269$, donde conchiudesi $c=7$, e

$$\sqrt{56169}=10^2.2+10.3+7=237.$$

3.° Pongasi di nuovo $n=2$, $P=22391824$, sarà $k=4$, e (140)

$$\sqrt{22391824}=10^3a+10^2b+10c+d.$$

Con la seguente operazione

```
22,3 9,1 8,2 4 | 4732
16
——
 6 3,9
 6 0 9
 ————
   3 0 1,8
   2 8 2 9
   ———————
     1 8 9 2,4
     1 8 9 2 4
     —————————
             0
```

ricaviamo $a=4$, $b=7$, $c=3$, $d=2$; adunque

$$\sqrt{22391824}=10^3.4+10^2.7+10.3+2=4732.$$

Infatti poichè $a^2=16$, si avrà $a=4$, e $2a=8$; quindi $b=7$, e $b(2.10a+b)=609$; e perchè $2(10a+b)=94$ si otterrà $c=3$, e $c(2.10^2a+2.10b+c)=2829$; posto ciò sarà $2(10^2a+10b+c)=946$, donde $d=2$ e $d(2.10^3a+2.10^2b+2.10c+d)=18924$, cioè niente avanza nella ultima sottrazione, e per conseguenza $\sqrt{22391824}=4732$.

4.° Seguiti a mettersi $n=2$, e sia $P=38068,692544$; sarà (142) $r=3$, e soppressa la virgola si convertirà P nell' intero $Q=38068692544$. Or noi tro-

viamo esattamente

$$\sqrt{38068692544}=10^5a+10^4b+10^3c+10^2d+10e+f=$$

$$=10^5.1+10^4.9+10^3.5+10^2.1+10.1+2=195112\,,$$

e $\sqrt{P}=\frac{\sqrt{Q}}{10^3}$, sarà quindi (55) $\sqrt{38068,692544}=\frac{195112}{10^3}=195,112$.

Che poi si trovino $a=1$, $b=9$, $c=5$, $d=1$, $e=1$, $f=2$ rendesi chiaro per la seguente operazione

```
3,8 0,6 8,6 9,2 5,4 4 1  195112
1
-----
2 8,0
2 6 1
-------
  1 9 6,8
  1 9 2 5
  --------
     4 3 6,9
     3 9 0 1
     -------
       4 6 8 2,5
       3 9 0 2 1
       ---------
         7 8 0 4 4,4
         7 8 0 4 4 4
         -----------
               0
```

per la quale risulta $a=1$, e $2a=2$; e quindi $b=9$, $b(2.10a+b)=261$, e $2(10a+b)=38$; donde $c=5$, $c(2.10^2a+2.10b+c)=1925$, e $2(10^2a+$ $+10b+c)=390$; laonde sarà $d=1$, $d(2.10^3a+2.10^2b+2.10c+d)=3901$, e $2(10^3a+10^2b+10c+d)=3902$; perciò $e=1$, $e(2.10^4a+2.10^3b+2.10^2c+$ $+2.10d+e)=39021$, e $2(10^4a+10^3b+10^2c+10d+e)=39022$; quindi $f=2$, ed essendo $f(2.10^5a+2.10^4b+2.10^3c+2.10^2d+2.10e+f)=780444$ niente resterà dopo la ultima sottrazione, e risulterà $\sqrt{Q}$ di cifre intere soltanto, sarà cioè esattamente $\sqrt{Q}=195112$.

5.° Pongasi per la ultima volta $n=2$, e si abbia $P=2681292$, la opera-

zione dovrà istituirsi come segue

```
2,6 8, 1 2, 9 2, 0 0, 0 0, 0 0, . . . . 1 1637,465 . . . .
1
———
1 6,8
1 5 6
—————
  1 2 1,2
   9 6 9
  ——————
   2 4 3 9,2
   2 2 8 6 9
   —————————
    1 5 2 3 0,0
    1 3 0 9 7 6
    ———————————
     2 1 3 2 4 0,0
     1 9 6 4 9 1 6
     —————————————
      1 6 7 4 8 4 0,0
      1 6 3 7 4 6 2 5
      ———————————————
        3 7 3 7 7 5 ec. ec. . . . . .
```

Essendo cioè $a=1$ e $2a=2$, si prenderà $b=6$ per avere $b(2.10a+b)=156 < 168$; donde $2(10a+b)=32$, e perciò $c=3$; quindi risulterà $c(2.10^2a+$ $+2.10b+c)=969$, e $2(10^2a+10b+c)=326$; si otterrà dunque $d=7$, e $d(2.10^3a+2.10^2b+2.10c+d)=22869$. Dalla sottrazione ultima rimane il numero 1523; laonde continuando la operazione, come è detto sopra (142), avremo $2(10^3a+10^2b+10c+d)=3274$, e quindi $e=4$, $e(2.10^4a+2.10^3b+$ $+2.10^2c+2.10d+e)=130976$, e $2(10^4a+10^3b+10^2c+10d+e)=32748$; donde ricavasi $f=6$, $f(2.10^5a+2.10^4b+2.10^3c+2.10^2d+2.10e+f)=$ 1964916, e $2(10^5a+10^4b+10^3c+10^2d+10e+f)=327492$; e però $g=5$, ec. ec. . . . .

Si avrà dunque pel citato numero

$$\sqrt{P'}=1637465\ \ldots,\ \text{e}\ \sqrt{P}=\sqrt{2681292}=1637,465\ \ldots$$

6.° Sia ora $n=3$, $P=143877824$, donde $k=3$, e quindi

$$\sqrt[3]{143877824}=10^2a+10b+c.$$

Ecco pertanto la operazione da eseguirsi per ottenere a, b, c.

```
143,8 77,8 24 | 524
125
------
 18 8,77
 15 6 08
 ---------
   3 2 69 8,24
   3 2 69 8 24
  -----------
        0
```

Poichè $a^3=125$, sarà $a=5$, $3a^2=75$ e per conseguenza $b=2$; posto ciò si avrà $3.10^2a^2b+3.10ab^2+b^3=15608$, e $3(10a+b)^2=8112$; quindi $c=4$, ed ottenendosi $3(10^2a+10b)^2c+3(10^2a+10b)c^2+c^3=3269824$ non vi sarà residuo dopo la ultima sottrazione. Adunque

$$\sqrt[3]{143877824}=10^2.5+10.2+4=524.$$

7.° Si abbia di nuovo $n=3$, e $P=74394516$. Siccome questa radice non può ottenersi che per approssimazione, farà d' uopo operare come segue

```
74,3 94,5 16,0 00,0 00,. . . | 420,57. . .
64
----
10 3,94
10 0 88
-----------
   3 06 5,16 0,00
   2 64 9 15 1 25
   ---------------
     41 6 00 8 75 0,00
     37 1 38 4 34 1 93
     -----------------
     4 4 62 4 40 8 07 ec. ec.
```

Poichè $a^3=64$, sarà $a=4$, $3a^2=48$, e perciò $b=2$. Or se $a=4$ e $b=2$, il valore $3.10^2a^2b+3.10ab^2+b^3$ risulterà $=10088$, e sarà $3(10a+b)^2=5292$, per cui dovrebbe dividersi 3065. Pertanto non potendosi 3065 dividere per 5292, si avrà (141) $c=0$, e $3(10^2a+10b)^2c+3(10^2a+10b)c^2+c^3=0$. Sarà dunque 306516 il residuo che si ha dalla ultima sottrazione. Continuando la operazione come è prescritto sopra (142), otterremo $3(10^2a+10b+c)^2=529200$, e quindi verrà $d=5$, donde $3(10^3a+10^2b+10c)^2d+3(10^3a+10^2b+10c)d^2+$ $+d^3=264915125$, $3(10^3a+10^2b+10c+d)^2=53046075$, e perciò $e=7$, $3(10^4a+10^3b+10^2c+10d)^2e+3(10^4a+10^3b+10^2c+10d)e^2+e^3=$

$=37138434193$ ec. ec... Essendo cioè $\sqrt[3]{P'}=42057\ldots$ si otterrà $\sqrt[3]{P}=$

$\sqrt[3]{74394516}=420,57\ldots$

8.° Debbasi finalmente estrarre la radice quarta dal numero 337340256I, sarà $n=4$, $P=3373402561$, e quindi $k=3$. Ponendo pertanto

$$\sqrt[4]{3373402561}=10^2a+10b+c,$$

si dedurranno le cifre a, b, c con la seguente operazione

```
33,7 340,2 561 | 241
16
----------
17 7,340
17 1 776
----------
   5 564 2,561
   5 564 2 561
   -----------
        o
```

Infatti poichè $a^4=16$, $a=2$, e $4a^3=32$; quindi $b=4$, $4.10^3a^3b+6.10^2a^2b^2+$ $+4.10ab^3+b^4=171776$, e $4(10a+b)^3=55296$; donde $c=1$, e $4(10^2a+$ $+10b)^3c+6(10^2a+10b)^2c^2+4(10^2a+10b)c^3+c^4=55642561$. Nulla dunque rimane dopo la ultima sottrazione; sarà perciò

$$\sqrt[4]{3373402561}=10^2.2+10.4+1=241.$$

CAPO VII.

DELLE EQUAZIONI IN GENERALE, DELLA RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI DETERMINATE DEL PRIMO GRADO, E DELLA ELIMINAZIONE.

144. Tutto quanto è detto finora riguardo al computo delle quantità fa mestieri applicare alla risoluzione delle equazioni, nella quale consiste l' uso dell'Algebra.

Dicesi *equazione* una qualunque uguaglianza fra due espressioni contenenti quantità cognite ed incognite. Siffatte espressioni formano i due *membri* della equazione. Vengono questi membri divisi dal segno di uguaglianza, e *primo* membro appellasi quello che precede il segno, e l' altro che vien dopo il medesimo segno si nomina *secondo* membro. Nelle equazioni le quantità conosciute si esprimono con le prime lettere a, b, c,... dell' alfabeto, le incognite con le ultime x, y, z, ...

Una equazione dicesi *determinata* se contiene una sola incognita, *indeterminata* se ne contiene più, giacchè quella, come vedremo, ammette una o un determinato numero di soluzioni, questa poi ne ammette infinite. Allora poi

diciamo che una equazione determinata si risolve, quando vengano effettivamente a determinarsi i valori della incognita che nella equazione medesima si contiene. Siffatti valori si appellano *radici* della equazione, che dicesi di quel grado medesimo al quale ascende la massima potenza della incognita.

Adunque per radici di una equazione determinata s' intendono quei valori che posti in luogo della quantità incognita soddisfanno alla equazione medesima, rendendo cioè il primo membro uguale al secondo. La equazione per esempio

$$x^4+16x=2x^2+15$$

è di quarto grado, e siccome dal prendere o $x=1$, o $x=-3$, o $x=1+2\sqrt{-1}$, o $x=1-2\sqrt{-1}$ la medesima vien soddisfatta, perciò

$$1,\ -3,\ 1+2\sqrt{-1},\ 1-2\sqrt{-1}$$

sono le sue radici, le due prime reali, le altre immaginarie.

145. *Qualunque termine col segno mutato può trasportarsi, salva la uguaglianza, dall' un membro nell'altro di una, qual ch' ella siasi, equazione.* Infatti ciò manifestamente riducesi a sommare o sottrarre da ambedue i membri la stessa quantità, lo che non turba punto la uguaglianza fra i membri medesimi. Sottraendo ad esempio $2x^2$ da ambo i membri della equazione x^4+ $+16x=2x^2+15$, otteniamo uguali fra loro i residui $x^4+16x-2x^2$, $2x^2+$ $+15-2x^2$, cioè $x^4+16x-2x^2=15$, dove si vede che il termine $+2x^2$ della proposta equazione è stato traslogato dal secondo membro nel primo col segno mutato, ed è chiaro che lo stesso può farsi in generale. Or se aggiugniamo $2x^2$ ai membri di questa ultima equazione riusciranno fra loro uguali le somme $x^4+16x-2x^2+2x^2$, $15+2x^2$, si tornerà cioè ad avere $x^4+16x=2x^2+15$ col trasportare il termine $-2x^2$ col segno mutato dal primo nel secondo membro.

Per siffatto trasporto possono i termini tutti di una data equazione collocarsi in un membro solo, sicchè nell'altro vi rimanga zero. Così se $x^4+16x=$ $=2x^2+15$, sarà pure

$$x^4+16x-2x^2-15=0.$$

146. Le quantità cognite, che nei diversi termini di una equazione qualunque moltiplicano le varie potenze della incognita, diconsi *coefficienti* di quei termini. Ora *in qualsivoglia equazione si potrà sempre ad un termine, salva la uguaglianza fra i membri, togliere il coefficiente, purchè pel medesimo si dividano tutti i rimanenti termini della equazione.* Ad esempio la equazione

$$x^4+16x=2x^2+15$$

potrà scriversi ancora nei modi seguenti

$$\frac{x^4}{2}+8x=x^2+\frac{15}{2},\quad \frac{x^4}{16}+x=\frac{x^2}{8}+\frac{15}{16}.$$

Per verità, senza punto turbare la uguaglianza fra i due membri di una equazione, possono tutti i termini di questa dividersi per una stessa quantità; ma

col torre il coefficiente ad un termine, e col dividere pel medesimo i termini rimanenti, la equazione viene in tutti i suoi termini a dividersi per la stessa quantità. Adunque ec.

147. Abbiasi una equazione qualunque, in cui contengansi dei termini fratti; *col moltiplicare pel prodotto dei denominatori dei termini fratti tutti i termini della equazione proposta, rimarrà questa, salva la uguaglianza fra i due membri, del tutto sgombra dai succennati termini fratti.* Ad esempio moltiplicando tutti i termini della equazione

$$\frac{x^4}{16}+x=\frac{x^2}{8}+\frac{15}{16}$$

pel prodotto 16.8.16, risulterà

$$8.16x^4+16.8.16x=16.16x^2+8.16.15,$$

equazione in cui non si contengono frazioni; e perchè questa è divisibile in tutti i suoi termini per 8.16, eseguendo una tal divisione, si tornerà ad ottenere la equazione

$$x^4+16x=2x^2+15,$$

dalla quale si dedusse (146) la proposta

$$\frac{x^4}{16}+x=\frac{x^2}{8}+\frac{15}{16}.$$

La ragione poi, per cui siffattamente operando si giugne sempre ad avere una equazione che sia priva di frazioni, è agevole a concepirsi. Perocchè col moltiplicare tutti i termini di una equazione pel prodotto dei denominatori delle frazioni che nella medesima si contengono, ciascuna di queste frazioni riducesi ad avere il numeratore esattamente divisibile pel suo denominatore, riducesi cioè ad un numero intero.

148. Propongasi ora a risolvere una equazione qualunque determinata, e che sia del primo grado; sia per esempio

$$\frac{ax}{b}+cx=\frac{bx}{d}-ex+f.$$

Togliendo le frazioni, risulterà (147)

$$adx+bcdx=b^2x-bdex+bdf.$$

Trasportando dal secondo nel primo membro tutti quei termini, in cui si contiene la incognita x, si avrà (145)

$$adx+bcdx-b^2x+bdex=bdf:$$

sarà cioè

$$(ad+bcd-b^2+bde)x=bdf;$$

donde si ricaverà (146)

$$x = \frac{bdf}{ad+bcd-b^2+bde}.$$

In generale le equazioni determinate di primo grado, dietro le regole già spiegate nei nnmeri precedenti, senza veruna difficoltà si ridurranno alla forma

$$x=A,$$

qualunque nel resto sia A, positiva cioè o negativa, reale o immaginaria.

149. A renderci pertanto familiare una tal riduzione fia bene lo esercitarci nel risolvere i seguenti problemi.

Probl. 1.° *Tra la età di un padre e quella del di lui figlio vi è una differenza di anni =40; dippiù se alla età del padre si aggiunga quella del figlio, si ottiene una somma di anni =100; cercasi la età di ciascuno.*

Pongasi $=x$ la età del padre: sarà quella del figlio $=x-40$. Ma alla età del padre aggiugnendo quella del figlio si ha 100. Dunque sarà

$$x+x-40=100,$$

ossia

$$2x=100+40=140,$$

e quindi

$$x=\frac{140}{2}=70.$$

È dunque la età del padre uguale ad anni settanta, e perciò la età del figlio sarà di anni trenta.

Probl. 2.° *Un padre morendo ha fatto il seguente testamento. Lascio ai tre miei figliuoli la somma di 10000 scudi da dividersi fra loro nella guisa che qui soggiungo: al maggiore di tutti voglio che si diano 2000 scudi più di quelli che si danno al secondo; dispongo per altro che a questo secondo si diano 3000 scudi più di quelli che ho risoluto lasciare al terzo ed ultimo mio figlio. Domandasi quale sia la eredità di ciascuno.*

Appellisi x la eredità del terzo figlio, sarà $x+3000$ la eredità del secondo, ed $x+3000+2000$ quella del primo, che è il maggiore di tutti. Or dovendo essere

$$x+x+3000+x+3000+2000=10000,$$

cioè

$$3x+8000=10000,$$

sarà

$$3x=10000-8000=2000,$$

e quindi

$$x=\frac{2000}{3}=666+\frac{2}{3}.$$

La eredità dunque del terzo figlio è di scudi $666+\frac{2}{3}$, e perciò quella del secondo è di scudi $3666+\frac{2}{3}$, e quella del primo è di scudi $5666+\frac{2}{3}$.

Probl. 3.° *Un Padre nel suo testamento ha lasciato una somma di scudi da dividersi fra i suoi figliuoli in modo che al maggiore di questi toechino* 1000 *scudi con* $\frac{1}{6}$ *di ciò che resta; al secondo* 2000 *scudi con* $\frac{1}{6}$ *di quanto rimane ; al terzo* 3000 *scudi con* $\frac{1}{6}$ *del rimanente , e così di seguito fino all'ultimo figlio. Or fatte le porzioni, queste si son trovate uguali fra loro. Si vuol sapere la intera somma degli scudi , la porzione di ciascuno , ed il numero dei figli.*

La somma degli scudi mettasi $=x$, sarà $1000+\frac{1}{6}(x-1000)$ la eredità del primo figlio, e $2000+\frac{1}{6}\left(x-2000-\left(1000+\frac{1}{6}(x-1000)\right)\right)$ quella del secondo : ma per supposizione queste eredità sono fra loro uguali ; si avrà dunque

$$1000+\frac{1}{6}(x-1000)=2000+\frac{1}{6}\left(x-2000-\left(1000+\frac{1}{6}(x-1000)\right)\right),$$

cioè

$$1000+\frac{x}{6}-\frac{1000}{6}=2000+\frac{x}{6}-\frac{2000}{6}-\frac{1000}{6}-\frac{x}{36}+\frac{1000}{36},$$

donde ricavasi

$$0=2000+\frac{x}{6}-\frac{2000}{6}-\frac{1000}{6}-\frac{x}{36}+\frac{1000}{36}-1000-\frac{x}{6}+\frac{1000}{6}=$$

$$=1000-\frac{2000}{6}-\frac{x}{36}+\frac{1000}{36},$$

e quindi

$$36000-12000-x+1000=0.$$

Da questa equazione conseguita

$$25000-x=0\text{, e perciò } x=25000.$$

Cinque sono dunque i fratelli, e 5000 è la porzione di ciascuno.

150. *Se due equazioni, che contengono una certa grandezza* x *elevata a potenze di esponente intero , debbano verificarsi pel medesimo valore di* x*; si dedurrà sempre da esse una terza equazione del tutto priva della grandezza* x.

Sieno

$$x+P=0\text{, } x+P'=0;$$

sottraendo la seconda dalla prima, sarà

$$P-P'=0.$$

Così proposte le equazioni

$$ax+by-c=0\ ,\ a'x+b'y-c'=0\Big\}\ldots\ (i),$$

saranno

$$x+\frac{by-c}{a}=0\ ,\ x+\frac{b'y-c'}{a'}=0\ ,$$

e perciò

$$P=\frac{by-c}{a}\ ,\ P'=\frac{b'y-c'}{a'}\ ,$$

donde

$$\frac{by-c}{a}-\frac{b'y-c'}{a'}=0.$$

Pertanto da questa ultima equazione otteniamo

$$a'by-a'c-ab'y+ac'=0\ ,$$

$$a'by-ab'y=(a'b-ab')y=a'c-ac',$$

$$y=\frac{a'c-ac'}{a'b-ab'}\ \ldots\ .\ (i').$$

Sostituendo questo valore di y in una delle equazioni (i), per esempio nella prima, si avrà

$$ax+\frac{a'bc-abc'}{a'b-ab'}-c=0\ ,$$

da cui conseguitano

$$aa'bx-a^2b'x+a'bc-abc'-a'bc+ab'c=0,$$

$$aa'bx-a^2b'x=abc'-ab'c\ ,$$

$$(a'b-ab')x=bc'-b'c,$$

$$x=\frac{bc'-b'c}{a'b-ab'}\ \ldots\ .\ (i'').$$

Supponendo dunque che nelle (i) le grandezze x, y ci sieno ignote, e note le rimanenti a, b, c; a', b', c', serviranno le (i'), (i'') a farci conoscere le x, y.

151. Seguitiamo ora con altri esempii a dimostrare la verità del teorema enunciato al principio del numero precedente. Si abbiano

$$x^2+Px+Q=0\ ,\ x^2+P'x+Q'=0\ ,$$

fatta la sottrazione, risulterà

$$(P-P')x+Q-Q'=0$$

ovvero

$$x+\frac{Q-Q'}{P-P'}=0\ldots\ (j).$$

Si moltiplichi (j) per x sicchè ottengasi

$$x^2+\frac{Q-Q'}{P-P'}x=0\;;$$

sottraendo questa da una delle due proposte equazioni, per esempio dalla prima, si giugnerà a

$$\left(P-\frac{Q-Q'}{P-P'}\right)x+Q=0\,,$$

donde deducesi

$$x+\frac{Q}{P-\frac{Q-Q'}{P-P'}}=0\ \ldots\ (j').$$

Or (j) ed (j') somministrano

$$(j)-(j')=\frac{Q-Q'}{P-P'}-\frac{Q}{P-\frac{Q-Q'}{P-P'}}=0,$$

nella quale manca x. Così proposte le due equazioni

$$x^2-xy+y^2=0\,,\quad x^2-axy+a^2=0\,,$$

saranno

$$P=-y\,,\ Q=y^2,\ P'=-ay\,,\ Q'=a^2,$$

e quindi

$$(j)=x-\frac{y^2-a^2}{y-ay}=0\,,\ (j')=x-\frac{y^2}{y-\frac{y^2-a^2}{y-ay}}=0\,,$$

onde sarà

$$(j)-(j')=-\frac{y^2-a^2}{y-ay}+\frac{y^2}{y-\frac{y^2-a^2}{y-ay}}=0\,,$$

ovvero

$$\left(y-\frac{y^2-a^2}{y-ay}\right)(a^2-y^2)+y^2(y-ay)=0\,,$$

da cui si ha

$$\Big(y(y-ay)-(y^2-a^2)\Big)(a^2-y^2)+y^2(y-ay)^2=0\,,$$

cioè

$$y(y-ay)(a^2-y^2)+(y^2-a^2)^2+y^2(y-ay)^2=0,$$

che, eseguendo le indicate moltiplicazioni, dopo la riduzione dei termini simili, darà

$$(1-a+a^2)y^4-(1+a)a^2y^2+a^4=0.$$

Inoltre se si dessero le due equazioni

$$x^2-y^2-k^2=0\,,\ xy-h^2=0\,,$$

prima si ridurrebbe la seconda alla forma

$$x^2-\frac{h^2x}{y}=0\,,$$

moltiplicandola per x e dividendola per y; dipoi si paragonerebbero ambedue con

$$x^2+Px+Q=0\,,\ x^2+P'x+Q'=0\,,$$

e si otterrebbero

$$P=0\,,\ Q=-y^2-k^2\,,\ P'=-\frac{h^2}{y}\,,\ Q'=0\,;$$

quindi

$$(j)=x-\frac{y^2+k^2}{\frac{h^2}{y}}=x-\frac{y(y^2+k^2)}{h^2}=0,\ (j')=x-\frac{y^2+k^2}{\frac{y^2+k^2}{\frac{h^2}{y}}}=x-\frac{h^2}{y}=0,$$

e perciò

$$(j)-(j')=-\frac{y(y^2+k^2)}{h^2}+\frac{h^2}{y}=0\,,$$

ovvero

$$y^4+k^2y^2-h^4=0.$$

152. Ma si può generalmente dimostrare che da due equazioni contenenti la medesima quantità x elevata a potenze di esponente intero, possa *eliminarsi* la stessa x, sicchè si abbia una terza equazione senza x. Si abbiano infatti

$$\left.\begin{array}{l} x^n+Px^{n-1}+Qx^{n-2}+Rx^{n-3}+\ldots\ldots+Ux+V=0 \\ x^n+P'x^{n-1}+Q'x^{n-2}+R'x^{n-3}+\ldots\ldots+U'x+V'=0 \end{array}\right\}(I).$$

Dalla prima sottraendo la seconda, si ottiene

$$(P-P')x^{n-1}+(Q-Q')x^{n-2}+(R-R')x^{n-3}+\ldots+(U-U')x+V-V'=0\,,$$

la quale divisa per $P-P'$ si muterà in

$$x^{n-1}+Q_1x^{n-2}+R_1x^{n-3}+\ldots\ldots+U_1x+V_1=0\ \Big\}\,(I')\,,$$

facendo per brevità

$$\frac{Q-Q'}{P-P'}=Q_1\,,\ \frac{R-R'}{P-P'}=R_1,\ \text{ec}\ldots\ \frac{U-U'}{P-P'}=U_1,\ \frac{V-V'}{P-P'}=V_1\,.$$

Moltiplichiamo ora per x la (I'), si avrà

$$x^n + Q_1 x^{n-1} + R_1 x^{n-2} + \dots + U_1 x^2 + V_1 x = 0\,,$$

che sottratta dalla prima delle equazioni (I) darà

$$(P-Q_1)x^{n-1} + (Q-R_1)x^{n-2} + \dots + (U-V_1)x + V = 0\,,$$

donde

$$\left. x^{n-1} + Q_2 x^{n-2} + \dots + U_2 x + V_2 = 0 \right\} (I'')\,,$$

facendo per compendio

$$\frac{Q-R_1}{P-Q_1} = Q_2\,, \dots \frac{U-V_1}{P-Q_1} = U_2\,,\ \frac{V}{P-Q_1} = V_2.$$

Le operazioni medesime, che eseguite si sono sopra le due proposte equazioni (I), rinnovate sopra le due (I'), (I'') condurranno ad altre due equazioni, nelle quali la massima potenza della x sarebbe del grado $n-2$. Da queste poi si perverrebbe ad altre due, in cui la potenza massima di x sarebbe del grado $n-3$, e così di seguito finchè se ne otterrebbero due contenenti la prima potenza di x, dalle quali risulterebbe (150) la equazione affatto priva di quella quantità. Si avverta però che ove le proposte sieno di diverso grado rispetto alla quantità che si vuole eliminare, anzi ogni altra operazione, farà d' uopo ridurle ad avere la quantità da eliminarsi innalzata al medesimo esponente, ciò che agevolmente si ottiene operando in guisa simigliante a quella che venne indicata sopra (151) riguardo alle equazioni

$$x^2 - y^2 - k^2 = 0\,,\ xy - h^2 = 0.$$

153. Dalle tre equazioni

$$\left.\begin{aligned} ax + a'y + a''z + a''' &= 0 \\ bx + b'y + b''z + b''' &= 0 \\ cx + c'y + c''z + c''' &= 0 \end{aligned}\right\} (\omega)$$

possono eliminarsi due delle tre quantità x, y, z che si suppongono soddisfare ciascuna con un valore particolare alle equazioni medesime. Vogliansi per esempio eliminare le prime due x, y. Abbiamo dalla prima

$$x = -\frac{a'y + a''z + a'''}{a}\,,$$

dalla seconda

$$x = -\frac{b'y + b''z + b'''}{b}\,,$$

dalla terza

$$x = -\frac{c'y + c''z + c'''}{c}\,. \quad (\omega')$$

I primi membri di queste tre equazioni sono uguali; lo stesso adunque dovrà dirsi ancora dei secondi membri; paragonando quindi la prima con la seconda e con la terza, si avranno le due seguenti equazioni

$$\frac{a'y+a''z+a'''}{a}=\frac{b'y+b''z+b'''}{b},$$

$$\frac{a'y+a''z+a'''}{a}=\frac{c'y+c''z+c'''}{c},$$

le quali non contengono la x. Togliendo a queste le frazioni, otterremo

$$a'by+a''bz+a'''b=ab'y+ab''z+ab''',$$

$$a'cy+a''cz+a'''c=ac'y+ac''z+ac''',$$

donde

$$y(a'b-ab')=ab''z-a''bz+ab'''-a'''b,$$

$$y(a'c-ac')=ac''z-a''cz+ac'''-a'''c.$$

Or dalla prima di queste ricaviamo

$$y=\frac{ab''z-a''bz+ab'''-a'''b}{a'b-ab'},$$

dalla seconda risulta

$$y=\frac{ac''z-a''cz+ac'''-a'''c}{a'c-ac'}. \quad (\alpha'')$$

Adunque

$$\frac{ab''z-a''bz+ab'''-a'''b}{a'b-ab'}=\frac{ac''z-a''cz+ac'''-a'''c}{a'c-ac'} \quad (\alpha'''),$$

equazione, in cui non si contengono le due quantità x, y.

Generalmente da m *equazioni contenenti* m *quantità* x, y, z, u, ... *se ne possono eliminare* m—1. Imperciocchè combinando la prima equazione con la seconda, terza, quarta, ec. . . potranno ottenersi $m-1$ equazioni prive affatto della prima quantità x; queste potranno col medesimo artificio ridursi ad $m-2$ equazioni, nelle quali manchi la seconda y; e così di seguito, finchè si giunga ad una sola equazione contenente la sola ultima di tutte le m quantità x, y, z, u, ...

154. Supponiamo pertanto che nelle tre equazioni (α) proposte al principio del numero precedente le quantità x, y, z sieno incognite; troveremo z dalla equazione (α'''). Infatti togliendo in essa le frazioni, si otterrà

$$aa'b''cz-a'a''bcz+aa'b'''c-a'a'''bc-a^2b''c'z+aa''bc'z-a^2b'''c'+aa'''bc'=$$

$$=aa'bc''z-a'a''bcz+aa'bc'''-a'a'''bc-a^2b'c''z+aa''b'cz-a^2b'c'''+aa'''b'c,$$

aggiugnendo al primo ed al secondo membro la quantità $a'a''bcz+a'a'''bc$, dividendo poi per a la equazione, quindi trasponendo dal secondo nel primo membro tutti quei termini che contengono la incognita z, ed infine tutti i termini cogniti del primo trasportandoli nel secondo membro, si dedurrà

$$(a'b''c-ab''c'+a''bc'-a'bc''+ab'c''-a''b'c)z=$$
$$=a'bc'''-ab'c'''+a'''b'c-a'b'''c+ab'''c'-a'''bc',$$

donde

$$z=\frac{a'bc'''-ab'c'''+a'''b'c-a'b'''c+ab'''c'-a'''bc'}{a'b''c-ab''c'+a''bc'-a'bc''+ab'c''-a''b'c}\ldots.(\omega_1).$$

Mettasi ora

$$a'bc'''-ab'c'''+a'''b'c-a'b'''c+ab'''c'-a'''bc'=A,$$
$$a'b''c-ab''c'+a''bc'-a'bc''+ab'c''-a''b'c=B;$$

la prima delle equazioni (ω'') si potrà scrivere come segue

$$y=\frac{(ab''-a''b)\dfrac{A}{B}+ab'''-a'''b}{a'b-ab'}=\frac{(ab''-a''b)A+(ab'''-a'''b)B}{(a'b-ab')B}.$$

Ma $(ab''-a''b)A+(ab'''-a'''b)B=$

$$=aa'bb''c'''-a^2b'b''c'''+aa'''b'b''c-aa'b''b'''c+a^2b''b'''c'-aa'''bb''c'-$$
$$-a'a''b^2c'''+aa''bb'c'''-a''a'''bb'c+a'a''bb'''c-aa''bb'''c'+a''a'''b^2c'+$$
$$+aa'b''b'''c-a^2b''b'''c'+aa''bb'''c'-aa'bb'''c''+a^2b'b'''c''-aa''b'b'''c-$$
$$-a'a'''bb''c+aa'''bb''c'-a''a'''b^2c'+a'a'''b^2c''-aa'''bb'c''+a''a'''bb'c=$$
$$=a'b(ab''c'''-a''bc'''+a''b'''c-ab'''c''+a'''bc''-a'''b''c)-$$
$$-ab'(ab''c'''-a''bc'''+a''b'''c-ab'''c''+a'''bc''-a'''b''c)=$$
$$=(a'b-ab')(ab''c'''-a''bc'''+a''b'''c-ab'''c''+a'''bc''-a'''b''c).$$

Sarà dunque

$$y=\frac{ab''c'''-a''bc'''+a''b'''c-ab'''c''+a'''bc''-a'''b''c}{a'b''c-ab''c'+a''bc'-a'bc''+ab'c''-a''b'c}\ldots.(\omega_2).$$

Pongasi inoltre

$$ab''c'''-a''bc'''+a''b'''c-ab'''c''+a'''bc''-a'''b''c=C;$$

la prima delle equazioni (ω') si muterà in

$$x=-\frac{a'\dfrac{C}{B}+a''\dfrac{A}{B}+a'''}{a}=-\frac{a'C+a''A+a'''B}{aB}.$$

Ma trovasi $a'C+a''A+a'''B=$

$$=aa'b''c'''-a'a''bc'''+a'a''b'''c-aa'b'''c''+a'a'''bc''-a'a'''b''c+$$
$$+a'a''bc'''-aa''b'c'''+a''a'''b'c-a'a''b'''c+aa''b'''c'-a''a'''bc'+$$
$$+a'a'''b''c-aa'''b''c'+a''a'''bc'-a'a'''bc''+aa'''b'c''-a''a'''b'c=$$
$$=a(a'b''c'''-a'b'''c''+a''b'''c'-a''b'c'''+a'''b'c''-a'''b''c').$$

Si avrà dunque

$$x=\frac{a'''b''c'-a'''b'c''+a''b'c'''-a''b'''c'+a'b'''c''-a'b''c'''}{a'b''c-ab''c'+a''be'-a'bc''+ab'c''-a''b'c}\ldots.(\alpha 3).$$

155. Applichiamo quanto è detto finora alla risoluzione dei seguenti problemi:

Probl. 1.° *Si cercano i valori di due numeri* x, y *di cui la somma è uguale ad* α, *e la differenza uguale a* β. Sia x il maggiore di questi numeri ed y il minore, avremo

$$x+y=\alpha\ ,\ x-y=\beta:$$

paragonando siffatte equazioni con le due (i) proposte sopra (150), si ottengono

$$a=1\ ,\ b=1\ ,\ c=\alpha\ ,$$
$$a'=1\ ,\ b'=-1\ ,\ c'=\beta\ ,$$

e per conseguenza i valori dei numeri x, ed y che si ricavano dalle due formole (i''), (i'), saranno

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}\ ,\ y=\frac{\alpha-\beta}{2}\ .$$

Probl. 2.° *Un Orefice vende 3 once di oro e 5 di argento per 59 ducati, e 5 once di oro e 7 di argento per 37 ducati: si domanda qual sia il costo di ciascuna oncia di oro, e quale quello di una oncia di argento.*

Sia x il costo di una oncia di oro ed y quello di una oncia di argento; per le condizioni del problema abbiamo

$$3x+5y=59\ ,\ 5x+7y=97\ ,$$

e però mettendo nelle due equazioni (i)

$$a=3\ ,\ b=5\ ,\ c=59\ ,$$
$$a'=5\ ,\ b'=7\ ,\ c'=97\ ;$$

le altre (i''), (i') daranno

$$x=\frac{5.97-7.59}{5.5-3.7}=18\ ;\ y=\frac{5.59-3.97}{5.5-3.7}=1.$$

Adunque l'oro vien pagato 18 ducati l'oncia, e l'argento un ducato l'oncia.

Probl. 3.° *Trovare un numero composto di due cifre, la somma delle quali pareggi la quarta parte del numero stesso, e tali che ponendo la cifra delle decine nel posto delle unità, e quella delle unità nel posto delle decine, risulti un altro numero uguale al doppio di quello che si cerca diminuito di 9.*

Dicasi x la cifra delle decine, ed y quella delle unità; si avranno per le condizioni proposte le equazioni che seguono

$$x+y=\frac{10x+y}{4}\ ,\ 2(10x+y)-9=10y+x\ ;$$

donde

$$4x+4y=10x+y\ ,\ 20x+2y-9=10y+x\ ,$$

ossia

$$-6x+3y=0\ ,\ 19x-8y-9=0.$$

Paragonando queste equazioni con le (i), si ottengono

$$a=-6\ ,\ b=3\ ;\ c=0\ ,$$

$$a'=19\ ,\ b'=-8\ ,\ c'=9\ ,$$

e le (i''), (i') daranno

$$x=\frac{3.9}{19.3-6.8}=\frac{3.9}{9}=3\ ,\ y=\frac{6.9}{19.3-6.8}=\frac{6.9}{9}=6.$$

Adunque il nnmero cercato è 36.

Probl. 4.° *Tizio ha fatto acquisto di tre cavalli: il primo con la metà del prezzo degli altri vale 150 ducati; il secondo con un terzo del prezzo degli altri, 156 ducati; finalmente il terzo con la metà del prezzo del primo e del secondo, 174 ducati. Domandasi il prezzo di ciascun cavallo.*
Sia x il prezzo del primo, y quello del secondo, e z quello del terzo; saranno

$$x+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=150\ ,\ y+\frac{x}{3}+\frac{z}{3}=156\ ,\ z+\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=174$$

le equazioni che si ricavano dalle condizioni del problema. Togliendo le frazioni, otteniamo

$$2x+y+z=300\ ,\ 3y+x+z=468\ ,\ 2z+x+y=348.$$

Paragonando queste equazioni con le tre (α) proposte al principio del numero 153, risultano

$$a=2\ ,\ a'=1\ ,\ a''=1\ ,\ a'''=-300\ ,$$

$$b=1\ ,\ b'=3\ ,\ b''=1\ ,\ b'''=-468\ ,$$

$$c=1\ ,\ c'=1\ ,\ c''=2\ ,\ c'''=-348.$$

Adunque i valori delle incognite x, y, z, che si rilevano dalle formole

(x_3), (x_2), (x_1), saranno

$$x = \frac{-300+1800-1044+468-936+348}{1-2+1-2+12-3} = \frac{336}{7} = 48\,,$$

$$y = \frac{-696+348-468+1872-600+300}{1-2+1-2+12-3} = \frac{756}{7} = 108\,,$$

$$z = \frac{-348+2088-900+468-936+300}{1-2+1-2+12-3} = \frac{672}{7} = 96\,;$$

e quindi il prezzo del primo cavallo è di 48 ducati, il secondo vale 108 ducati, ed il terzo 96.

Probl. 5.° *Proposte le tre equazioni*

$$6x-9y=0\,,$$
$$10x+7z=-2\,,$$
$$-15y+8z=-13\,;$$

si cerca quali sieno i valori di x, y, z *tali che le soddisfacciano.* Confrontando queste con le tre equazioni (x), avremo

$$a=6,\ a'=-9,\ a''=0,\ a'''=0\,,$$
$$b=10,\ b'=0,\ b''=7,\ b'''=2\,,$$
$$c=0,\ c'=-15,\ c''=8,\ c'''=13\,;$$

e quindi le altre (x_3), (x_2), (x_1) daranno

$$x = \frac{-144+819}{630+720} = \frac{675}{1350} = \frac{1}{2}\,,$$

$$y = \frac{546-96}{630+720} = \frac{450}{1350} = \frac{1}{3}\,,$$

$$z = \frac{-1170-180}{630+720} = \frac{-1350}{1350} = -1.$$

156. Ma nello applicare le formole generali alla risoluzione delle equazioni dei problemi particolari potrebbero alcuna volta i valori delle incognite presentarsi sotto la forma $\frac{k}{0}$ ovvero sotto l' altra $\frac{0}{0}$; converrà quindi per la completa teoria della risoluzione delle equazioni di primo grado a più incognite, cercare la interpretazione che si dovrà dare a siffatti risultamenti.

In due equazioni a due incognite se il valore di una di queste incognite è della forma $\frac{k}{0}$, *quello dell' altra incognita dovrà essere della forma medesima, ma di segno contrario.* Consideriamo infatti le due generali

equazioni (i) risolute al n.° 150, le quali si possono scrivere come segue

$$ax+by=c, \quad a'x+b'y=c'.$$

Supponendo che esse diano $x=\frac{k}{0}$, conseguentemente alla formola (i'') sarà

$$a'b=ab', \text{ e } b'c>, \text{ o } <bc':$$

ma moltiplicando i due membri della prima di queste espressioni rispettivamente per i due membri della seconda, si avrà

$$a'bb'c>, \text{ o } <abb'c', \text{ cioè } a'c>, \text{ o } <ac';$$

adunque il valore di y che si ricava dalla equazione (i') sarà eziandio della forma $\frac{k}{0}$, di segno però contrario a quello del valore di x.

Pertanto dalla equazione $a'b=ab'$ si deduce $a'=\frac{ab'}{b}$; questo valore di a' sostituito nella seconda delle equazioni (i) dà

$$\frac{ab'}{b}x+b'y=c', \text{ donde si ottiene } ax+by=\frac{bc'}{b'}.$$

Quindi conseguita che per la supposizione di $a'b=ab'$ si riduce la seconda delle equazioni (i) ad avere il primo membro identico con quello della prima, mentre il secondo membro risulta del tutto diverso dal secondo membro della prima, se è pur vero che debba essere insieme $b'c>$,o$<bc'$; infatti dividendo per b' questa disuguaglianza si ha $c>$,o$<\frac{bc'}{b'}$. Or ciò importa manifesta contradizione. *È dunque assurdo il sistema delle due equazioni* (i) *allorchè i valori delle incognite* x, y *risultano della forma* $\frac{k}{0}$, *e perciò il problema che dà luogo a siffatto sistema di equazioni è impossibile.*

157. Suppongasi ora che le (i) diano $x=\frac{0}{0}$, saranno

$$a'b=ab', \quad b'c=bc';$$

e quindi moltiplicando queste equazioni fra loro, avremo

$$a'bb'c=abb'c', \text{ cioè } a'c=ac'.$$

Donde si rileva che sarà eziandio $y=\frac{0}{0}$. *Se dunque in due equazioni a due incognite il valore di una di esse è della forma* $\frac{0}{0}$, *il valore dell'altra è necessariamente della medesima forma.* Inoltre poichè $a'b=ab'$, e $b'c=bc'$, saranno $a'=\frac{ab'}{b}$, e $c'=\frac{b'c}{b}$; sostituendo questi valori di a' e c' nella seconda

delle equazioni (t), questa si muterà in

$$\frac{ab'}{b}x+b'y=\frac{b'c}{b},$$

che moltiplicata per b e divisa per b', darà

$$ax+by=c.$$

Adunque in supposizione che nelle due (t) i valori delle incognite x, y sieno della forma $\frac{0}{0}$, la seconda rendesi del tutto identica con la prima, ed il loro sistema non forma che una sola equazione. Ma allorchè si ha una sola equazione tra due incognite, ad una di esse può assegnarsi un valore ad arbitrio, e perciò il problema che conduce ad una tale equazione è di natura sua indeterminato.

Adunque quando i valori delle incognite risultano uguali a $\frac{0}{0}$, il problema è per se stesso indeterminato.

158. Da tre equazioni a tre incognite x, y, z eliminando la z, si otterranno due equazioni tra x ed y; similmente eliminando la y dalle tre medesime equazioni se ne avranno altre due tra x e z. Or in questi due sistemi di equazioni le incognite dovendo avere lo stesso valore che nelle tre proposte, quante volte queste danno $x=\frac{k}{0}$, ovvero $x=\frac{0}{0}$, anche in quei due sistemi dovrà essere $x=\frac{k}{0}$, ovvero $x=\frac{0}{0}$. Ma (156. 157) in un sistema di due equazioni a due incognite, supponendo una di queste incognite uguale a $\frac{k}{0}$, ovvero a $\frac{0}{0}$, anche l'altra risulta uguale o a $\frac{k}{0}$, ovvero a $\frac{0}{0}$, ed il problema è assurdo ovvero indeterminato. Quindi conseguita che se nelle tre proposte equazioni è $x=\frac{k}{0}$, ovvero $x=\frac{0}{0}$, dovranno in esse le altre due incognite y, z essere ancora della forma $\frac{k}{0}$, ovvero $\frac{0}{0}$; ed il problema sarà assurdo nel primo caso, ed indeterminato nel secondo.

Progredendo con lo stesso discorso da tre a quattro equazioni, e da quattro a cinque, e così di seguito, si vedrà che la conclusione precedente è vera per qualunque sia il numero delle equazioni di primo grado, allorchè il numero delle equazioni agguaglia il numero delle incognite.

159. Daremo fine alla discussione delle equazioni del primo grado a più incognite con esaminare il caso, nel quale in ciascuna di esse manca il termine noto. Prendiamo per esempio le tre equazioni (α) scritte al principio del numero 153, nelle quali si supponga $a'''=b'''=c'''=0$. In questa supposizione tutti e tre i numeratori delle formole (α_1), (α_2), (α_3) si ridurranno a zero: d'altronde, siccome niuna relazione particolare ha luogo tra i coefficienti a, a', a''; b, b', b''; c, c', c'' delle incognite x, y, z, il comune denominatore di quelle medesime formole, cioè

$$a'b''c-ab''c'+a''bc'-a'bc''+ab'c''-a''b'c,$$

si ridurrà ad una grandezza h, la quale, generalmente parlando, sarà diversa da zero; donde $x=y=z=\frac{0}{h}=0$.

Per altro può benissimo avvenire che si abbia alcuna volta $h=0$; in questo caso si avrà $x=y=z=\frac{0}{0}$, i valori cioè delle incognite saranno (157) indeterminati. Ma quantunque sia vero che i valori delle incognite sieno in tal caso indeterminati, non è però a credere che tali ancora sieno i rapporti tra le medesime incognite. Imperocchè siffatti rapporti sono determinati, e possono sempre ottenersi per mezzo delle proposte equazioni.

Si abbiano infatti le tre equazioni

$$ax+a'y+a''z=0\,,\ bx+b'y+b''z=0\,,\ cx+c'y+c''z=0\,,$$

nelle quali si supponga

$$h,\ o\ a'b''c-ab''c'+a''bc'-a'bc''+ab'c''-a''b'c=0.$$

Esse possono evidentemente notarsi ancora come segue

$$a\frac{x}{z}+a'\frac{y}{z}+a''=0\,;\ b\frac{x}{z}+b'\frac{y}{z}+b''=0\,,\ c\frac{x}{z}+c'\frac{y}{z}+c''=0.$$

Or dalle due prime di queste equazioni, considerando $\frac{x}{z}$ ed $\frac{y}{z}$ come due sole incognite, si deducono (150) le altre

$$\frac{x}{z}=\frac{a'b''-a''b'}{ab'-a'b}\,,\ \frac{y}{z}=\frac{a''b-ab''}{ab'-a'b}\,,$$

dalle quali, dando a z un valore ad arbitrio, si ricavano i valori di x ed y. Or io dico che questi valori soddisfanno eziandio alla terza equazione; sostituendoli infatti in questa equazione, troviamo

$$c\times\frac{a'b''-a''b'}{ab'-a'b}+c'\times\frac{a''b-ab''}{ab'-a'b}+c''=0\,,$$

ossia

$$a'b''c-ab''c'+a''bc'-a'bc''+ab'c''-a''b'c=0,$$

la quale equazione per ipotesi è soddisfatta.

Si conchiuda dunque *che in tre equazioni di primo grado a tre incognite prive del termine noto, i valori delle incognite sono generalmente parlando uguali a zero; e che, se a quella supposizione si aggiunga l'altra, che cioè sia zero il comune denominatore delle formole* (α_1), (α_2), (α_3), *i valori di queste incognite sono indeterminati, ma i loro rapporti determinati.*

CAPO VIII.

DELLA RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI DETERMINATE DEL SECONDO GRADO.

160. Dopo di avere esposto quanto si appartiene alla risoluzione delle equazioni del primo grado, fa d' uopo inoltrarci a risolvere le equazioni del secondo grado. Il grado di una equazione (144) essendo uguale al massimo esponento della incognita, le equazioni del secondo grado contengono la quantità incognita elevata al quadrato; e quindi tre diverse specie di termini hanno luogo nelle equazioni del secondo grado: termini cioè affatto cogniti, termini che sono affetti dalla prima potenza della incognita, e termini infine che contengono il quadrato della incognita. Adunque ogni equazione di secondo grado potrà (146) generalmente rappresentarsi per

$$x^2+Ax+B=0 \ldots (e):$$

esprimono A, B quantità cognite, positive o negative, reali o immaginarie.
Se $A=0$, avremo

$$x^2+B=0\text{, e quindi } x^2=-B \ldots (e').$$

E per incominciare dalla equazione (e'), in essa si supponga primieramente B reale: i valori della incognita x saranno (115. 116)

$$\left.\begin{array}{ll} \text{se } B<0\text{, ovvero} & x=\sqrt{-B}\,,\ x=-\sqrt{-B} \\ \text{se } B>0. & x=\sqrt{B}.\sqrt{-1}\,,\ x=-\sqrt{B}.\sqrt{-1} \end{array}\right\} \ldots (e'')$$

Rimane per altro a vedere se x ammetta altri valori che soddisfacciano alla equazione (e'). Per tal fine suppongasi

$$x=u+v\sqrt{-1}\,;$$

avremo $(u+v\sqrt{-1})^2+B=0$, ossia $u^2+2uv\sqrt{-1}-v^2+B=0$. Or da questa equazione risultano (119) le due seguenti

$$u^2-v^2=-B\,,\ 2uv=0,$$

le quali non possono soddisfarsi altrimenti che col mettere $u=0$ e $v^2=B$, ovvero $v=0$ e $u^2=-B$. Adunque il valore di $x=u+v\sqrt{-1}$ allora soddisfarà alla equazione (e'), quando $u=0$ e $v=\pm\sqrt{B}$, ovvero quando $v=0$ ed $u=\pm\sqrt{-B}$; e siccome quando $u=0$, e $v=\pm\sqrt{B}$ si ha

$$x=u+v\sqrt{-1}=\pm\sqrt{B}.\sqrt{-1}\,,$$

e quando $v=0$, ed $u=\pm\sqrt{-B}$ si ottiene

$$x=u+v\sqrt{-1}=\pm\sqrt{-B},$$

ne segue non potersi ammettere per la incognita x altri valori, che soddisfacciano alla (e'), fuorchè i sopraddetti (e'').

Sia in secondo luogo B immaginaria, sicchè si abbia (119) $-B=a+$ $+b\sqrt{-1}$, la (e') si muterà in

$$x^2=a+b\sqrt{-1}\ \ldots\ (e''').$$

Facendo come sopra $x=u+v\sqrt{-1}$, risulterà

$$(u+v\sqrt{-1})^2=a+b\sqrt{-1},$$

ovvero

$$u^2+2uv\sqrt{-1}-v^2=a+b\sqrt{-1}.$$

Questa equazione dividesi nelle due

$$u^2-v^2=a,\quad 2uv=b;$$

queste poi innalzate al quadrato danno

$$u^4-2u^2v^2+v^4=a^2,\quad 4u^2v^2=b^2;$$

le quali aggiunte insieme producono

$$a^2+b^2=u^4+2u^2v^2+v^4=(u^2+v^2)^2;$$

adunque avremo ancora

$$u^2+v^2=\sqrt{a^2+b^2}$$

Or con la equazione $u^2+v^2=\sqrt{a^2+b^2}$ sommando l'altra $u^2-v^2=a$, otteniamo

$$2u^2=\sqrt{a^2+b^2}+a,$$

e dalla prima sottraendo la seconda, ricaviamo

$$2v^2=\sqrt{a^2+b^2}-a.$$

Adunque le quantità u e v determinate in maniera che il valore di $x=u+v\sqrt{-1}$ soddisfaccia alla equazione (e'''), saranno

$$u=\pm\sqrt{(\sqrt{a^2+b^2}+a):2},\quad v=\pm\sqrt{(\sqrt{a^2+b^2}-a):2}\ \Big\}\ldots(e^{iv}).$$

Posto ciò, essendo $2uv=b$, donde $u=\frac{b}{2v}$, e $v=\frac{b}{2u}$, potrà x o rappresentarsi per

$$x=u+\frac{b}{2u}\sqrt{-1}\text{, ovvero per } x=\frac{b}{2v}+v\sqrt{-1}\,.$$

Sostituendo in luogo di u e v i valori già trovati, alla (e''') soddisfarà

$$\left.\begin{array}{l} x=\pm\left\{\sqrt{(\sqrt{a^2+b^2}+a):2}+\dfrac{b}{2\sqrt{(\sqrt{a^2+b^2}+a):2}}.\sqrt{-1}\right\} \\ \text{ovvero, che è lo stesso,} \\ x=\pm\left\{\dfrac{b}{2\sqrt{(\sqrt{a^2+b^2}-a):2}}+\sqrt{(\sqrt{a^2+b^2}-a):2}.\sqrt{-1}\right\} \end{array}\right\}(e^{v}).$$

Propongasi per esempio la equazione $x^2+\sqrt{-1}=0$; sarà $a+b\sqrt{-1}=-\sqrt{-1}$, quindi $a=0$, $b=-1$, e perciò

$$x=\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{-1}\right).$$

161. Passiamo ora a vedere come possa risolversi la generale equazione di secondo grado. Comunque si prendano le quantità A, e B, reali cioè o immaginarie, potrà la (e), aggiugnendo e sottraendo $\frac{A^2}{4}$ nel suo primo membro, scriversi come segue

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+B-\frac{A^2}{4}=0\text{, donde }\left(x+\frac{A}{2}\right)^2=-\left(B-\frac{A^2}{4}\right)\ \ldots\ (e^{vi}),$$

la quale essendo della medesima forma che la (e') e la (e'''), si risolverà per rapporto ad $x+\frac{A}{2}$ come le stesse (e'), (e''') sono già state risolute per rispetto ad x. Adunque supponendo primieramente che $B-\frac{A^2}{4}$ sia una quantità reale, si avrà

$$x+\frac{A}{2}=\pm\sqrt{-\left(B-\frac{A^2}{4}\right)}=\pm\frac{\sqrt{A^2-4B}}{2},$$

se $B-\frac{A^2}{4}<0$, ed

$$x+\frac{A}{2}=\pm\sqrt{B-\frac{A^2}{4}}.\sqrt{-1}=\pm\frac{\sqrt{4B-A^2}}{2}.\sqrt{-1},$$

se $B-\frac{A^2}{4}>0$; saranno cioè

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{-A\pm\sqrt{A^2-4B}}{2},\ \text{se}\ 4B<A^2, \\ \text{ed}\ x=\frac{-A\pm\sqrt{4B-A^2}\,.\sqrt{-1}}{2},\ \text{se}\ 4B>A^2 \end{array}\right\}(e^{VII})$$

i valori che nel caso di $B-\frac{A^2}{4}$ reale, soddisfaranno alla equazione (e).

Ma se $B-\frac{A^2}{4}$ è una quantità immaginaria, cosicchè si abbia

$$-\left(B-\frac{A^2}{4}\right)=a+b\sqrt{-1},$$

sarà $\left(x+\frac{A}{2}\right)^2=a+b\sqrt{-1}$. Mettendo $x+\frac{A}{2}=u+v\sqrt{-1}$, avremo come sopra

$$(u+v\sqrt{-1})^2=a+b\sqrt{-1},$$

da cui ricavansi i valori di u e v già espressi dalle formole (e^{IV}), e quindi otterremo

$$x+\frac{A}{2}=u+\frac{b}{2u}\sqrt{-1}=\pm\left\{\sqrt{(\sqrt{a^2+b^2}+a):2}+\frac{b}{2\sqrt{(\sqrt{a^2+b^2}+a):2}}.\sqrt{-1}\right\},$$

ovvero, che è lo stesso,

$$x+\frac{A}{2}=\frac{b}{2v}+v\sqrt{-1}=\pm\left\{\frac{b}{2\sqrt{(\sqrt{a^2+b^2}-a):2}}+\sqrt{(\sqrt{a^2+b^2}-a):2}.\sqrt{-1}\right\}.$$

Adunque nel caso che $-\left(B-\frac{A^2}{4}\right)=a+b\sqrt{-1}$, si soddisfa alla (e) con

$$x=-\frac{A}{2}\pm\left\{\sqrt{(\sqrt{a^2+b^2}+a):2}+\frac{b}{2\sqrt{(\sqrt{a^2+b^2}+a):2}}.\sqrt{-1}\right\},$$

ovvero, che è lo stesso, con

$$x=-\frac{A}{2}\pm\left\{\frac{b}{2\sqrt{(\sqrt{a^2+b^2}-a):2}}+\sqrt{(\sqrt{a^2+b^2}-a):2}.\sqrt{-1}\right\}.\quad(e^{VIII})$$

Se per esempio si volesse risolvere la equazione di secondo grado

$$x^2-(7+\sqrt{-1})x+10+2\sqrt{-1}=0,$$

essendo $A=-(7+\sqrt{-1})$, e $B=10+2\sqrt{-1}$, sarà $-\left(B-\frac{A^2}{4}\right)=a+$
$+b\sqrt{-1}=-\left(10+2\sqrt{-1}-\frac{(7+\sqrt{-1})^2}{4}\right)=-\frac{1}{4}(40+8\sqrt{-1}-49-$
$-14\sqrt{-1}+1)=\frac{1}{4}(8+6\sqrt{-1})=2+\frac{3}{2}\sqrt{-1}$, e quindi $a=2$, e $b=\frac{3}{2}$.

Si soddisfarà dunque alla proposta con

$$x=\frac{7+\sqrt{-1}}{2}\pm\left\{\sqrt{\frac{\sqrt{4+\frac{9}{4}}+2}{2}}+\frac{3}{4\sqrt{\frac{\sqrt{4+\frac{9}{4}}+2}{2}}}.\sqrt{-1}\right\}=$$

$$=\frac{7+\sqrt{-1}}{2}\pm\left\{\sqrt{\frac{\sqrt{25}+4}{4}}+\frac{3}{4\sqrt{\frac{\sqrt{25}+4}{4}}}.\sqrt{-1}\right\}=$$

$$=\frac{7+\sqrt{-1}}{2}\pm\left\{\sqrt{\frac{9}{4}}+\frac{3}{4\sqrt{\frac{9}{4}}}.\sqrt{-1}\right\}=\frac{7+\sqrt{-1}}{2}\pm\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{6}\sqrt{-1}\right)=$$

$$=\frac{7+\sqrt{-1}\pm(3+\sqrt{-1})}{2},$$ ossia con $x=5+\sqrt{-1}$, e con $x=2$.

162. Ma gioverà trattenerci più a lungo nelle applicazioni delle formole (e''') risolvendo i problemi che seguono.

Probl. 1.° *Un giuocatore di 160 ducati con cui si è posto a giuocare ne ha perduti* x ; *ma in progresso ne ha guadagnato* 6298 , *e con questi non solamente ha compensato alla perdita* x , *ma dippiù , uscito dal giuoco , dice di aver guadagnato tanti ducati , quanti se n' esprimono dal prodotto degli* x *ducati perduti prima pel numero dei ducati rimastigli dopo la perdita stessa. Si domanda il numero* x *dei ducati da principio perduti.*

Per le condizioni del problema il numero 6298 agguaglia x più il prodotto di x per $160-x$; donde risulta

$$6298=x+x(160-x)=x+160x-x^2,$$

ossia

$$x^2-161x+6298=0.$$

Comparando questa equazione con la (e), troveremo

$$A=-161\ ,\ B=6298\ ,$$

e quindi $A^2=25921$, $4B=25192$, cioè $4B<A^2$. Essendo adunque $A^2-4B=729$, sarà per la prima delle (e'')

$$x=\frac{161\pm\sqrt{729}}{2}=\frac{161\pm27}{2}.$$

Si soddisfa cioè ugualmente al problema o col valore di $x=\frac{161+27}{2}=\frac{188}{2}=94$, ovvero con l'altro $x=\frac{161-27}{2}=\frac{134}{2}=67$.

Probl. 2.° *Qual è quel numero il cui quadrato è uguale al numero stesso diminuito prima di 3, e poi moltiplicato per 4?* Sia x il numero che si domanda, avremo

$$x^2=4(x-3)\text{, ossia } x^2-4x+12=0.$$

Paragonando siffatta equazione con la (e), si vede che $A=-4$, $B=12$, e quindi $A^2=16$, $4B=48$, donde $4B>A^2$; e però essendo $4B-A^2=32$, facendo uso della seconda delle formole (e''), verrà soddisfatto alla equazione del problema con

$$x=\frac{4}{2}\pm\frac{\sqrt{32}}{2}.\sqrt{-1}=2\pm2\sqrt{2}.\sqrt{-1}.$$

Questi valori di x essendo immaginarii, cioè impossibili, mostrano ad evidenza che niun numero ha il quadrato uguale allo stesso numero diminuito prima di tre unità, e poi moltiplicato per 4.

CAPO IX.

DELLA NATURA E DELLE PROPRIETÀ DELLE EQUAZIONI.

163. Una equazione del grado m^{simo} dicesi *ordinata* per rispetto alle potenze della incognita se, essendo zero il secondo membro, il primo termine del primo membro contenga la incognita elevata alla potenza del grado m, mentre gli altri termini dello stesso primo membro contengano le potenze della incognita successivamente decrescenti. Ma una equazione ordinata si dirà *completa* allorchè vi si trovano tutte le potenze della incognita dalla massima fino alla minima, fino cioè al termine cognito. Così la equazione

$$x^m-Ax^{m-1}+Bx^{m-2}-Cx^{m-3}+Dx^{m-4}-\ldots\pm T=0\ldots(\Phi)$$

è ordinata, ed è al tempo stesso completa. Prima pertanto di andare oltre in vedere come possano risolversi le equazioni dei gradi superiori al secondo, con-

verrà trattenerci alcun poco nell' analisi generale della natura e delle proprietà delle equazioni medesime (*).

164. Supponendo che nella equazione (Φ) $A, B, C, D, \ldots, T$ rappresentino quantità reali positive o negative, sia α una radice reale o immaginaria della medesima, sarà il suo primo membro divisibile esattamente per $x-\alpha$. Infatti se α è radice della equazione, si avrà (144)

$$\alpha^m - A\alpha^{m-1} + B\alpha^{m-2} - C\alpha^{m-3} + D\alpha^{m-4} - \ldots \pm T = 0,$$

donde rilevasi

$$\pm T = -\alpha^m + A\alpha^{m-1} - B\alpha^{m-2} + C\alpha^{m-3} - D\alpha^{m-4} + \ldots$$

Sostituendo quindi nella (Φ) questo valore di $\pm T$, ricaveremo

$$\begin{aligned}(\Phi) &= x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + Dx^{m-4} - \ldots\ldots - \\ &- \alpha^m + A\alpha^{m-1} - B\alpha^{m-2} + C\alpha^{m-3} - D\alpha^{m-4} + \ldots\ldots = \\ &= x^m - \alpha^m - A(x^{m-1} - \alpha^{m-1}) + B(x^{m-2} - \alpha^{m-2}) - C(x^{m-3} - \alpha^{m-3}) + \\ &+ D(x^{m-4} - \alpha^{m-4}) - \ldots\ldots = 0.\end{aligned}$$

Ma con un poco di attenzione si scorgerà essere

$$x^m - \alpha^m = (x-\alpha)(x^{m-1} + \alpha x^{m-2} + \alpha^2 x^{m-3} + \alpha^3 x^{m-4} + \ldots + \alpha^{m-1}),$$

e conseguentemente ancora

$$\begin{aligned}&x^{m-1} - \alpha^{m-1} = (x-\alpha)(x^{m-2} + \alpha x^{m-3} + \alpha^2 x^{m-4} + \ldots + \alpha^{m-2}), \\ &x^{m-2} - \alpha^{m-2} = (x-\alpha)(x^{m-3} + \alpha x^{m-4} + \ldots + \alpha^{m-3}), \\ &x^{m-3} - \alpha^{m-3} = (x-\alpha)(x^{m-4} + \ldots + \alpha^{m-4}), \\ &\text{ec.} \quad . \quad . \quad \text{ec.} \quad . \quad . \quad .\end{aligned}$$

Adunque

$$\begin{aligned}(\Phi) = &\ (x-\alpha)(x^{m-1} + \alpha x^{m-2} + \alpha^2 x^{m-3} + \alpha^3 x^{m-4} + \ldots + \alpha^{m-1}) - \\ &- A(x-\alpha)(x^{m-2} + \alpha x^{m-3} + \alpha^2 x^{m-4} + \ldots\ldots + \alpha^{m-2}) + \\ &+ B(x-\alpha)(x^{m-3} + \alpha x^{m-4} + \ldots\ldots + \alpha^{m-3}) - \\ &- C(x-\alpha)(x^{m-4} + \ldots\ldots + \alpha^{m-4}) + \ldots\ldots = \\ = &\ (x-\alpha)(x^{m-1} + \alpha x^{m-2} + \alpha^2 x^{m-3} + \alpha^3 x^{m-4} + \ldots + \alpha^{m-1} - \\ &\qquad - Ax^{m-2} - A\alpha x^{m-3} - A\alpha^2 x^{m-4} - \ldots - A\alpha^{m-2} + \\ &\qquad + Bx^{m-3} + B\alpha x^{m-4} + \ldots + B\alpha^{m-3} - \\ &\qquad - Cx^{m-4} - \ldots - C\alpha^{m-4} + \ldots) = 0,\end{aligned}$$

(*) Come a giudizio di tutt' i dotti il Geometra Italiano Pietro Paoli ha gran merito, così in particolar modo a me sembra essere presso che singolare nel trattar che fa le proprietà generali delle equazioni: che però in tal materia non potendo comporre altro trattato che possa stare a fronte di quello già maestrevolmente compilato dal cennato autore, ho stimato far cosa utilissima il conformarmi a questo sì nell' ordine come ancora nella maggior parte delle dimostrazioni: dico *nella maggior parte delle dimostrazioni*, poichè non mi resterò io dal mutare in esso alcuna cosa, ed altra aggiugnere o togliere, ove a mio parere con ciò fare venisse a meglio chiarirsi, e però a giovanetti studiosi più agevole se ne rendesse l' intendimento.

ossia

$$(\Phi)=(x-\alpha)(x^{m-1}-B_1x^{m-2}+C_1x^{m-3}-D_1x^{m-4}+\ldots\mp T_1)=0\,,$$

mettendo cioè

$$-B_1=\alpha-A\,,$$
$$C_1=\alpha^2-A\alpha+B\,,$$
$$-D_1=\alpha^3-A\alpha^2+B\alpha-C\,,$$
$$\cdots\cdots$$
$$\mp T_1=\alpha^{m-1}-A\alpha^{m-2}+B\alpha^{m-3}-C\alpha^{m-4}+\ldots$$

Ora il prodotto $(x-\alpha)(x^{m-1}-B_1x^{m-2}+C_1x^{m-3}-D_1x^{m-4}+\ldots\mp T_1)$ è divisibile esattamente per $x-\alpha$. Adunque ec.

Pertanto, rappresentando con β una radice reale o immaginaria della equazione

$$x^{m-1}-B_1x^{m-2}+C_1x^{m-3}-D_1x^{m-4}+\ldots\mp T_1=0\,,$$

nella medesima guisa il primo suo membro si ridurrebbe alla forma

$$(x-\beta)(x^{m-2}-C_2x^{m-3}+D_2x^{m-4}-\ldots\pm T_2)\,;$$

risulterà quindi

$$(\Phi)=(x-\alpha)(x-\beta)(x^{m-2}-C_2x^{m-3}+D_2x^{m-4}-\ldots\pm T_2)=0.$$

Inoltre chiamando γ una radice reale o immaginaria della equazione

$$x^{m-2}-C_2x^{m-3}+D_2x^{m-4}-\ldots\pm T_2=0\,,$$

il primo membro di questa riuscirebbe ancora della forma

$$(x-\gamma)(x^{m-3}-D_3x^{m-4}+\ldots\mp T_3)\,;$$

sarà dunque

$$(\Phi)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x^{m-3}-D_3x^{m-4}+\ldots\mp T_3)=0\,,$$

e così di seguito. Laonde si risolverà finalmente la (Φ) in un prodotto di m fattori di primo grado della forma

$$x-\alpha\,,\; x-\beta\,,\; x-\gamma\,,\; x-\delta\,,\;\ldots\,,\; x-\omega\,,$$

in guisa che si otterrà

$$(\Phi)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\ldots(x-\omega)=0.$$

Ora il prodotto $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\ldots(x-\omega)$ si annulla qualunque delle m quantità α, β, γ, δ, ..., ω si sostituisca ad x, nè può altrimenti

annullarsi ; avrà quindi la (Φ) m radici, e non altre che le determinate dalle m formole

$$x-\alpha=0\ ,\ x-\beta=0\ ,\ x-\gamma=0\ ,\ x-\delta=0\ ,\ \ldots\ ,\ x-\omega=0.$$

Ma ciò suppone evidentemente che il primo membro della proposta equazione (Φ) essendo decomposto in m fattori di primo grado

$$x-\alpha\ ,\ x-\beta\ ,\ x-\gamma\ ,\ x-\delta\ ,\ \ldots\ ,\ x-\omega\ ,$$

non possa esattamente dividersi per alcun'altra espressione di questo grado, la qual cosa è vera e può dimostrarsi nel modo seguente. Se la divisione per un binomio $x-a$ differente dai primi, fosse possibile, si avrebbe

$$x^m-Ax^{m-1}+Bx^{m-2}-\ldots\ldots=(x-a)(x^{m-1}-A_0x^{m-2}+B_0x^{m-3}-\ldots)\ ,$$

e per conseguenza

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\ldots(x-\omega)=(x-a)(x^{m-1}-A_0x^{m-2}+B_0x^{m-3}-\ldots).$$

Mutando x in a, si ottiene

$$(a-\alpha)(a-\beta)(a-\gamma)(a-\delta)\ldots(a-\omega)=(a-a)(a^{m-1}-A_0a^{m-2}+B_0a^{m-3}-\ldots).$$

Or questa equazione è assurda ; infatti il suo secondo membro è $=0$ a cagione del fattore $a-a$, mentre non è così del primo, che è un prodotto di fattori tutti differenti da zero, se è pur vero che a differisce da ciascuna delle radici α, β, γ, δ, . . . , ω. Adunque ec.

165. Dal detto conseguita che *una equazione qualunque ha tante radici quante unità si contengono nel massimo esponente della incognita*, *il quale segna il grado della equazione medesima* (*).

Inoltre *una equazione ordinata*, *che abbia tutte le radici reali e negative*, *cioè* $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$, . . . , $-\omega$, *avrà senza dubbio i suoi termini tutti positivi*. Vicendevolmente *se tutti i termini di una equazione ordinata sono positivi*, *tutte le radici reali della medesima saranno negative* ; poichè se la proposta avesse una radice sola che fosse reale e positiva, sostituita questa in luogo della incognita nella equazione, il primo membro della medesima sarebbe composto di termini tutti positivi, e per conseguenza non potrebbe annullarsi.

Finalmente *se le radici di una equazione ordinata sono tutte reali e positive*, *i suoi termini saranno alternativamente positivi e negativi*. Vicendevolmente *ove i termini di una equazione ordinata sieno alternativamente positivi e negativi*, *tutte le radici reali della medesima dovranno essere po-*

(*) La verità dell'enunciato teorema, dipendendo dal ragionamento fatto nel numero precedente, suppone che *ogni equazione ha per lo meno una radice*, *sia reale sia immaginaria*. Recentemente il signor Cauchy nelle sue lezioni alla scuola Politecnica di Parigi ha dato una dimostrazione completa di questa proposizione ; ma noi non crediamo esser ella di tal natura da poter trovar luogo in un corso di semplici elementi di Algebra ; e però con la più parte dei Matematici ammettiamo la proposizione come un *principio*, che si avrà in seguito occasione di verificare per un non piccol numero di equazioni.

sitive; infatti una radice reale e negativa sostituita nella equazione proposta in luogo della incognita renderebbe i termini del primo membro o tutti positivi o tutti negativi, secondo che il grado della equazione è pari o dispari, nè per consegnenza questo primo membro potrebbe uguagliarsi al secondo, che è zero.

166. Eseguendo la moltiplicazione degli m fattori $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$, $x-\delta$, . . . , $x-\omega$ nel secondo membro della equazione identica (164)

$$x^m-Ax^{m-1}+Bx^{m-2}-Cx^{m-3}+Dx^{m-4}-\ .\ .\ .\ .\ .\ \pm T=$$
$$=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\ .\ .\ .\ .\ .\ (x-\omega),$$

otterremo

$$x^m-Ax^{m-1}+Bx^{m-2}-Cx^{m-3}+Dx^{m-4}-\ .\ .\ .\ .\ .\pm T=$$
$$=x^m-(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ .\ .\ .\ +\omega)x^{m-1}+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\ .\ .\ .\ +\alpha\omega\ +$$
$$+\beta\gamma+\beta\delta+\ .\ .\ .\ +\beta\omega+\gamma\delta+\ .\ .\ .\ +\gamma\omega+\ .\ .\ .\ +\delta\omega+\ .\ .\ .)x^{m-2}-$$
$$-(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\ .\ .\ .\ +\alpha\beta\omega+\beta\gamma\delta+\ .\ .\ .+\beta\gamma\omega+\ .\ .\ .+\gamma\delta\omega+\ .\ .\ .)x^{m-3}+$$
$$+(\alpha\beta\gamma\delta+\ .\ .\ .\ +\alpha\beta\gamma\omega+\ .\ .\ .\ +\beta\gamma\delta\omega+\ .\ .\ .\ )x^{m-4}-\ .\ .\ .\ \pm\alpha\beta\gamma\delta\ .\ .\ .\ \omega.$$

Adunque

$$A=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ .\ .\ .\ +\omega$$
$$B=\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\ldots+\alpha\omega+\beta\gamma+\beta\delta+\ldots+\beta\omega+\gamma\delta+\ldots+\gamma\omega+\ldots+\delta\omega+\ldots$$
$$C=\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\ .\ .\ .\ +\alpha\beta\omega+\beta\gamma\delta+\ .\ .\ .\ +\beta\gamma\omega+\ .\ .\ .\ +\gamma\delta\omega+\ .\ .\ .$$
$$D=\alpha\beta\gamma\delta+\ .\ .\ .\ +\alpha\beta\gamma\omega+\ .\ .\ .\ +\beta\gamma\delta\omega+\ .\ .\ .$$
$$\vdots$$
$$T=\alpha\beta\gamma\delta\ .\ .\ .\ \omega.$$

Queste formole danno luogo alla seguente proposizione. *In una equazione qualunque ordinata, in cui il coefficiente del primo termine è* $=1$, *il coefficiente del secondo termine col segno mutato pareggia la somma di tutte le radici; il coefficiente del terzo termine col proprio segno equivale alla somma dei prodotti binarii delle medesime; il coefficiente del quarto termine preso col segno contrario uguaglia la somma dei prodotti ternarii di esse; e così di seguito: l'ultimo termine poi preso col proprio segno ovvero col segno contrario, secondo che il grado della equazione è pari ovvero dispari, è uguale al prodotto di tutte insieme le radici.*

167. Sia data la equazione

$$(\Phi)=x^m-Ax^{m-1}+Bx^{m-2}-Cx^{m-3}\mp\ .\ .\ .\ \pm T=0.$$

Quantunque le m radici α, β, γ, ... , ω della medesima ci fossero incognite,

potremmo nondimeno determinare sempre la somma delle medesime radici elevate ciascuna ad un qualsivoglia esponente dato.

Dividasi la equazione (Φ) prima pel fattore $x-\alpha$, poi la medesima (Φ) si divida per $x-\beta$, quindi da capo si divida la (Φ) per $x-\gamma$, e così di seguito fino all' ultimo fattore $x-\omega$; otterremo (164)

$$\begin{array}{l}
x^{m-1}-B_{,}x^{m-2}+C_{,}x^{m-3}-D_{,}x^{m-4}+\ldots=0,\\
x^{m-1}-B_{,,}x^{m-2}+C_{,,}x^{m-3}-D_{,,}x^{m-4}+\ldots=0,\\
x^{m-1}-B_{,,,}x^{m-2}+C_{,,,}x^{m-3}-D_{,,,}x^{m-4}+\ldots=0,\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
x^{m-1}-B_{(m)}x^{m-2}+C_{(m)}x^{m-3}-D_{(m)}x^{m-4}+\ldots=0.
\end{array}$$

Or siccome la prima di queste equazioni ha le radici medesime della equazione (Φ) eccettuatane la α; il coefficiente $B_{,}$ sarà uguale alla somma di tutte le radici della (Φ) eccettuatane α; il coefficiente $C_{,}$ uguaglierà la somma dei prodotti binarii delle radici medesime eccettuatine però quelli in cui si contiene α; il coefficiente $D_{,}$ pareggerà la somma dei prodotti ternarii di quelle stesse radici toltine quei prodotti, in cui entra α; e così di seguito. Similmente siccome le radici della seconda equazione sono le stesse radici della (Φ) eccettuatane la radice β; il coefficiente $B_{,,}$ sarà uguale alla somma delle radici della equazione (Φ) meno β; il coefficiente $C_{,,}$ equivarrà alla somma dei prodotti delle radici medesime prese a due a due meno però quei prodotti che contengono β; il coefficiente $D_{,,}$ agguaglierà la somma dei prodotti delle stesse radici prese a tre a tre eccettuatine quelli in cui entra β; e così di seguito. Discorrendo in somigliante guisa pei coefficienti delle altre equazioni si vedrà chiaro che volendo sommare assieme gli m coefficienti $B_{,}$, $B_{,,}$, $B_{,,,}$, ..., $B_{(m)}$ si otterranno m somme di tutte le radici della equazione (Φ) meno però una somma delle stesse radici giacchè in $B_{,}$ manca α, in $B_{,,}$ manca β, in $B_{,,,}$ manca γ, ec. Similmente si farà manifesto che sommando gli m coefficienti $C_{,}$, $C_{,,}$, $C_{,,,}$, ..., $C_{(m)}$ si otterranno m somme di tutti i prodotti binarii delle radici della (Φ) meno due somme di tali prodotti: infatti in $C_{,}$ mancano i prodotti $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$, ..., dippiù in $C_{,,}$ non vi sono i prodotti $\beta\alpha$, $\beta\gamma$, $\beta\delta$, ..., in $C_{,,,}$ non si contengono i prodotti $\gamma\alpha$, $\gamma\beta$, $\gamma\delta$, ..., ec: quindi nella somma di questi coefficienti uno stesso prodotto, per esempio $\alpha\beta$ mancherà due volte, una volta perchè manca α, ed un' altra perchè manca β: l' istesso dicasi per un qualunque altro di tai prodotti. Si dedurrà inoltre che la somma degli m coefficienti $D_{,}$, $D_{,,}$, $D_{,,,}$, ..., $D_{(m)}$ equivarrà ad m somme di tutti i prodotti ternarii delle radici della equazione (Φ) meno tre di cotali somme; imperocchè uno stesso prodotto, per esempio $\alpha\beta\gamma$, mancherà in quella somma tre volte, una volta perchè manca α, un' altra perchè manca β, ed una terza perchè manca γ, e per la ragione medesima tre volte altresì mancherà in essa qualunque altro di siffatti prodotti, ec. ec....
Adunque (166)

$$\begin{array}{l}
B_{,}+B_{,,}+B_{,,,}+\ldots+B_{(m)}=mA-A=(m-1)A,\\
C_{,}+C_{,,}+C_{,,,}+\ldots+C_{(m)}=mB-2B=(m-2)B,
\end{array}$$

$$D_{\prime}+D_{\prime\prime}+D_{\prime\prime\prime}+\ldots+D_{(m)}=mC-3C=(m-3)C\,,$$

$$\vdots$$

D' altronde abbiamo le equazioni identiche

$$\begin{aligned}x^m-Ax^{m-1}+Bx^{m-2}-Cx^{m-3}+\ldots\ldots=\\ =(x-\alpha)(x^{m-1}-B_{\prime}x^{m-2}+C_{\prime}x^{m-3}-D_{\prime}x^{m-4}+\ldots)=\\ =x^m-(B_{\prime}+\alpha)x^{m-1}+(C_{\prime}+B_{\prime}\alpha)x^{m-2}-(D_{\prime}+C_{\prime}\alpha)x^{m-3}+\ldots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^m-Ax^{m-1}+Bx^{m-2}-Cx^{m-3}+\ldots\ldots=\\ =(x-\beta)(x^{m-1}-B_{\prime\prime}x^{m-2}+C_{\prime\prime}x^{m-3}-D_{\prime\prime}x^{m-4}+\ldots)=\\ =x^m-(B_{\prime\prime}+\beta)x^{m-1}+(C_{\prime\prime}+B_{\prime\prime}\beta)x^{m-2}-(D_{\prime\prime}+C_{\prime\prime}\beta)x^{m-3}+\ldots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^m-Ax^{m-1}+Bx^{m-2}-Cx^{m-3}+\ldots\ldots=\\ =(x-\gamma)(x^{m-1}-B_{\prime\prime\prime}x^{m-2}+C_{\prime\prime\prime}x^{m-3}-D_{\prime\prime\prime}x^{m-4}+\ldots)=\\ =x^m-(B_{\prime\prime\prime}+\gamma)x^{m-1}+(C_{\prime\prime\prime}+B_{\prime\prime\prime}\gamma)x^{m-2}-(D_{\prime\prime\prime}+C_{\prime\prime\prime}\gamma)x^{m-3}+\ldots\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}x^m-Ax^{m-1}+Bx^{m-2}-Cx^{m-3}+\ldots\ldots=\\ =(x-\omega)(x^{m-1}-B_{(m)}x^{m-2}+C_{(m)}x^{m-3}-D_{(m)}x^{m-4}+\ldots)=\\ =x^m-(B_{(m)}+\omega)x^{m-1}+(C_{(m)}+B_{(m)}\omega)x^{m-2}-(D_{(m)}+C_{(m)}\omega)x^{m-3}+\ldots\end{aligned}$$

dalle quali ricavansi

$$\begin{aligned}A=B_{\prime}+\alpha\,,\ B=C_{\prime}+B_{\prime}\alpha\,,\ C=D_{\prime}+C_{\prime}\alpha\,,\ \ldots\\ A=B_{\prime\prime}+\beta\,,\ B=C_{\prime\prime}+B_{\prime\prime}\beta\,,\ C=D_{\prime\prime}+C_{\prime\prime}\beta\,,\ \ldots\\ A=B_{\prime\prime\prime}+\gamma\,,\ B=C_{\prime\prime\prime}+B_{\prime\prime\prime}\gamma\,,\ C=D_{\prime\prime\prime}+C_{\prime\prime\prime}\gamma\,,\ \ldots\\ \vdots\\ A=B_{(m)}+\omega\,,\ B=C_{(m)}+B_{(m)}\omega\,,\ C=D_{(m)}+C_{(m)}\omega\,,\ \ldots\end{aligned}$$

Or queste danno

$$B_{\prime}=A-\alpha,\ C_{\prime}=B-B_{\prime}\alpha=B-A\alpha+\alpha^2,\ D_{\prime}=C-C_{\prime}\alpha=C-B\alpha+A\alpha^2-\alpha^3,\ \ldots$$

$$B_{\prime\prime}=A-\beta,\ C_{\prime\prime}=B-B_{\prime\prime}\beta=B-A\beta+\beta^2,\ D_{\prime\prime}=C-C_{\prime\prime}\beta=C-B\beta+A\beta^2-\beta^3,\ \ldots$$

$B_{III}=A-\gamma,\ C_{III}=B-B_{III}\gamma=B-A\gamma+\gamma^2,\ D_{III}=C-C_{III}\gamma=C-B\gamma+A\gamma^2-\gamma^3,\ \ldots$

$\vdots$

$B_{(m)}=A-\omega,\ C_{(m)}=B-B_{(m)}\omega=B-A\omega+\omega^2,\ D_{(m)}=C-C_{(m)}\omega=C-B\omega+A\omega^2-\omega^3,\ldots$

donde conseguitano

$$B_I+B_{II}+B_{III}+\ldots+B_{(m)}=mA-(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\omega),$$
$$C_I+C_{II}+C_{III}+\ldots+C_{(m)}=mB-A(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\omega)+$$
$$+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots+\omega^2),$$
$$D_I+D_{II}+D_{III}+\ldots+D_{(m)}=mC-B(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\omega)+$$
$$+A(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots+\omega^2)-(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\ldots+\omega^3),$$

$\vdots$

Adunque mettendo

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\omega=P,$$
$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots+\omega^2=P^{(2)},$$
$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\ldots+\omega^3=P^{(3)},$$
$$\vdots$$
$$\alpha^r+\beta^r+\gamma^r+\ldots+\omega^r=P^{(r)},$$

si avranno

$$(m-1)A=mA-P,$$
$$(m-2)B=mB-AP+P^{(2)},$$
$$(m-3)C=mC-BP+AP^{(2)}-P^{(3)},\ \ldots$$

da cui risultano

$$P=A,\ P^{(2)}=AP-2B,\ P^{(3)}=AP^{(2)}-BP+3C,\ \ldots.$$

In generale adunque allorchè $r<m$ potrà stabilirsi

$$P^{(r)}=AP^{(r-1)}-BP^{(r-2)}+CP^{(r-3)}-\ldots\pm rR\ \ldots(1),$$

in cui R è nella equazione (Φ) il coefficiente della potenza x^{m-r}, ed il segno $+$ ha luogo quando r è dispari, il segno $-$ quando r è pari.

Supponiamo che $r=m$, la potenza x^{m-r} diventerà x^0, a cui corrisponde nella equazione (Φ) il coefficiente T; e però la somma delle potenze m^{sime} di tutte le radici della (Φ) si dedurrà dalla formola

$$P^{(m)}=AP^{(m-1)}-BP^{(m-2)}+CP^{(m-3)}-\ldots\pm mT\ldots(2).$$

Finalmente sia $r>m$ della quantità n, sarà $r=m+n$, e quindi moltiplicando la equazione (Φ) per x^n si otterrà

$$x^r - Ax^{r-1} + Bx^{r-2} - Cx^{r-3} + \dots \pm Tx^n = 0;$$

donde

$$\alpha^r - A\alpha^{r-1} + B\alpha^{r-2} - C\alpha^{r-3} + \dots \pm T\alpha^n = 0,$$

$$\beta^r - A\beta^{r-1} + B\beta^{r-2} - C\beta^{r-3} + \dots \pm T\beta^n = 0,$$

$$\gamma^r - A\gamma^{r-1} + B\gamma^{r-2} - C\gamma^{r-3} + \dots \pm T\gamma^n = 0,$$

$$\vdots$$

$$\omega^r - A\omega^{r-1} + B\omega^{r-2} - C\omega^{r-3} + \dots \pm T\omega^n = 0;$$

e perciò

$$\begin{aligned}\alpha^r + \beta^r + \gamma^r + \dots + \omega^r = {} & A(\alpha^{r-1} + \beta^{r-1} + \gamma^{r-1} + \dots + \omega^{r-1}) - \\ & - B(\alpha^{r-2} + \beta^{r-2} + \gamma^{r-2} + \dots + \omega^{r-2}) + \\ & + C(\alpha^{r-3} + \beta^{r-3} + \gamma^{r-3} + \dots + \omega^{r-3}) - \\ & - \dots \mp T(\alpha^n + \beta^n + \gamma^n + \dots + \omega^n),\end{aligned}$$

ossia

$$P^{(r)} = AP^{(r-1)} - BP^{(r-2)} + CP^{(r-3)} - \dots \mp TP^{(n)} \dots (3),$$

in cui il segno superiore avrà luogo allorchè $r-n$ è pari, e l'inferiore quando $r-n$ è dispari.

Mettendo n successivamente $=1, 2, \dots$ risulteranno

$$P^{(m+1)} = AP^{(m)} - BP^{(m-1)} + CP^{(m-2)} - \dots \mp TP,$$

$$P^{(m+2)} = AP^{(m+1)} - BP^{(m)} + CP^{(m-1)} - \dots \mp TP^{(2)},$$

ec. . . ec. . . .

168. Sia proposta la seguente equazione

$$x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = 0,$$

e cerchisi di trovare la somma delle potenze quarte delle quattro radici della medesima. Rappresentiamo questa somma con $P^{(4)}$, la formola (2), della quale si deve far uso in tal ricerca, diventerà

$$P^{(4)} = P^{(3)} + 19P^{(2)} - 49P + 4.30,$$

essendo

$$A = 1, \ B = -19, \ C = -49, \ D = -30.$$

Or la formola (1) dà $P = A = 1$, $P^{(2)} = AP - 2B = 1 + 38 = 39$, $P^{(3)} = AP^{(2)} - BP + 3C = 39 + 19 - 147 = -89$. Sarà dunque $P^{(4)} = 723$. Ritenendo poi la medesima equazione di sopra, si potrebbero eziandio conoscere i valori di

$P^{(5)}$, $P^{(6)}$, . . . , i valori cioè delle somme delle quattro radici, di cui ciascuna sia innalzata all' esponente 5, 6, . . . Infatti per la equazione (3) si otterrebbero

$$P^{(5)}=AP^{(4)}-BP^{(3)}+CP^{(2)}-DP^{(1)}=723-1691-1911+30=-2849\,,$$
$$P^{(6)}=AP^{(5)}-BP^{(4)}+CP^{(3)}-DP^{(2)}=-2849+13737+4361+1170=16419,$$

ec. . . . . . .

169. Avendo finora veduto in qual maniera possano ottenersi le somme delle potenze delle radici di una data equazione (Φ), non riuscirà fuor di proposito il soggiugnere ora la dimostrazione di quelle formole che servono a calcolare la somma di tutti i prodotti che si possono formare con le radici della medesima.

Sieno α, β, γ, δ, . . . , ω queste radici, e rappresentiamo col simbolo $P^{(m,n)}$ la somma di tutti i prodotti della forma $\alpha^m\,\beta^n$ possibili a farsi con le medesime, ponendone ciascuna in luogo dell' altra, in guisa che, se le radici sono due sole α, β, sia

$$P^{(m,n)}=\alpha^m\beta^n+\beta^m\alpha^n\,,$$

se sono tre α, β, γ sia

$$P^{(m,n)}=\alpha^m\beta^n+\beta^m\alpha^n+\alpha^m\gamma^n+\gamma^m\alpha^n+\beta^m\gamma^n+\gamma^m\beta^n\,,$$

e così appresso. Ciò posto, poichè

$$\begin{aligned}P^{(m)}.P^{(n)}=&(\alpha^m+\beta^m+\gamma^m+\delta^m+\ldots+\omega^m)(\alpha^n+\beta^n+\gamma^n+\delta^n+\ldots+\omega^n)=\\=&\alpha^{m+n}+\alpha^m\beta^n+\alpha^m\gamma^n+\alpha^m\delta^n+\ldots+\alpha^m\omega^n+\\&+\beta^m\alpha^n+\beta^{m+n}+\beta^m\gamma^n+\beta^m\delta^n+\ldots+\beta^m\omega^n+\\&+\gamma^m\alpha^n+\gamma^m\beta^n+\gamma^{m+n}+\gamma^m\delta^n+\ldots+\gamma^m\omega^n+\\&+\delta^m\alpha^n+\delta^m\beta^n+\delta^m\gamma^n+\delta^{m+n}+\ldots+\delta^m\omega^n+\\&+\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad+\\&+\omega^m\alpha^n+\omega^m\beta^n+\omega^m\gamma^n+\omega^m\delta^n+\ldots+\omega^{m+n},\end{aligned}$$

sarà

$$P^{(m)}.P^{(n)}=P^{(m+n)}+P^{(m,n)},$$

donde risulta

$$P^{(m,n)}=P^{(m)}.P^{(n)}-P^{(m+n)}\;.\;.\;.\;(a).$$

Similmente se dinotiamo col segno $P^{(m,n,p)}$ la somma di tutti i prodotti della forma $\alpha^m\;\beta^n\;\gamma^p$ in modo che, se le radici sono tre sole α, β, e γ, sia

$$\begin{aligned}P^{(m,n,p)}=&\alpha^m.\beta^n\gamma^p+\alpha^m\gamma^n\beta^p+\beta^m\alpha^n\gamma^p+\\&+\beta^m\gamma^n\alpha^p+\gamma^m\beta^n\alpha^p+\gamma^m\alpha^n\beta^p\,,\end{aligned}$$

se quattro α, β, γ, e δ, sia

$$\begin{aligned}P^{(m,n,p)}=&\alpha^m\beta^n\gamma^p+\alpha^m\beta^n\delta^p+\alpha^m\gamma^n\delta^p+\beta^m\gamma^n\delta^p+\\&+\alpha^m\gamma^n\beta^p+\alpha^m\delta^n\beta^p+\alpha^m\delta^n\gamma^p+\beta^m\delta^n\gamma^p+\end{aligned}$$

$$+\beta^m\alpha^n\gamma^p+\beta^m\alpha^n\delta^p+\gamma^m\alpha^n\delta^p+\gamma^m\beta^n\delta^p+$$
$$+\beta^m\gamma^n\alpha^p+\beta^m\delta^n\alpha^p+\gamma^m\delta^n\alpha^p+\gamma^m\delta^n\beta^p+$$
$$+\gamma^m\beta^n\alpha^p+\delta^m\beta^n\alpha^p+\delta^m\gamma^n\alpha^p+\delta^m\gamma^n\beta^p+$$
$$+\gamma^m\alpha^n\beta^p+\delta^m\alpha^n\beta^p+\delta^m\alpha^n\gamma^p+\delta^m\beta^n\gamma^p,$$

e così appresso; poichè il prodotto di $P^{(m,n)}$ per $P^{(p)}=\alpha^p+\beta^p+\gamma^p+\delta^p+$ $+\ldots+\alpha^p$ contiene tutti i termini della forma $\alpha^{m+p}\beta^n$, tutti quei della forma $\alpha^m\beta^{n+p}$, e finalmente tutti quei della forma $\alpha^m\beta^n\gamma^p$, in guisa che si ha

$$P^{(m,n)}\,.\,P^{(p)}=P^{(m+p,n)}+P^{(m,n+p)}+P^{(m,n,p)},$$

sarà

$$P^{(m,n,p)}=P^{(m,n)}\,.\,P^{(p)}-P^{(m+p,n)}-P^{(m,n+p)}\;\ldots\;(a').$$

Di nuovo se con $P^{(m,n,p,q)}$ si esprima la somma di tutti i prodotti della forma $\alpha^m\beta^n\gamma^p\delta^q$ in modo che, se le radici sono quattro solamente α, β, γ, δ, sia

$$P^{(m,n,p,q)}=\alpha^m\beta^n\gamma^p\delta^q+\alpha^m\beta^n\delta^p\gamma^q+\alpha^m\gamma^n\delta^p\beta^q+\beta^m\gamma^n\delta^p\alpha^q+$$
$$+\alpha^m\gamma^n\beta^p\delta^q+\alpha^m\delta^n\beta^p\gamma^q+\alpha^m\delta^n\gamma^p\beta^q+\beta^m\delta^n\gamma^p\alpha^q+$$
$$+\beta^m\alpha^n\gamma^p\delta^q+\beta^m\alpha^n\delta^p\gamma^q+\gamma^m\alpha^n\delta^p\beta^q+\gamma^m\beta^n\delta^p\alpha^q+$$
$$+\beta^m\gamma^n\alpha^p\delta^q+\beta^m\delta^n\alpha^p\gamma^q+\gamma^m\delta^n\alpha^p\beta^q+\gamma^m\delta^n\beta^p\alpha^q+$$
$$+\gamma^m\beta^n\alpha^p\delta^q+\delta^m\beta^n\alpha^p\gamma^q+\delta^m\gamma^n\alpha^p\beta^q+\delta^m\gamma^n\beta^p\alpha^q+$$
$$+\gamma^m\alpha^n\beta^p\delta^q+\delta^m\alpha^n\beta^p\gamma^q+\delta^m\alpha^n\gamma^p\beta^q+\delta^m\beta^n\gamma^p\alpha^q,$$

se cinque α, β, γ, δ, ε, sia $P^{(m,n,p,q)}$ uguale alla somma di cento venti prodotti tutti della forma $\alpha^m\beta^n\gamma^p\delta^q$, tante essendo le permutazioni quaternarie (126) che si possono formare con le cinque lettere α, β, γ, δ, ε, e così di seguito; poichè il prodotto di $P^{(m,n,p)}$ per $P^{(q)}$ contiene tutti quei termini che sono della forma $\alpha^{m+q}\beta^n\gamma^p$, tutti quei della forma $\alpha^m\beta^{n+q}\gamma^p$, tutti gli altri della forma $\alpha^m\beta^n\gamma^{p+q}$, ed infine tutti i termini della forma $\alpha^m\beta^n\gamma^p\delta^q$, sicchè si abbia

$$P^{(m,n,p)}.\,P^{(q)}=P^{(m+q,n,p)}+P^{(m,n+q,p)}+P^{(m,n,p+q)}+P^{(m,n,p,q)},$$

sarà quindi

$$P^{(m,n,p,q)}=P^{(m,n,p)}.\,P^{(q)}-P^{(m+q,n,p)}-P^{(m,n+q,p)}-P^{(m,n,p+q)}\ldots(a'').$$

Con analoghi ragionamenti giugneremo ad ottenere

$$P^{(m,n,p,q,r)}=P^{(m,n,p,q)}\,.\,P^{(r)}-P^{(m+r,n,p,q)}-P^{(m,n+r,p,q)}-P^{(m,n,p+r,q)}-$$
$$-P^{(m,n,p,q+r)}\;\ldots\;(a''').$$

170. Si abbia la seguente equazione

$$x^3-2x^2-x+2=0,$$

e vogliasi determinare la somma di tutti i prodotti della forma $\alpha\beta^2\gamma^3$, che si possono formare con le tre sue radici. La formola (a'), mettendo $m=1$, $n=2$, e $p=3$, riducesi a

$$P^{(1,2,3)}=P^{(1,2)}\,.\,P^{(3)}-P^{(4,2)}-P^{(1,5)}.$$

Or essendo $A=2$, $B=-1$, e $C=-2$, saranno (167. (1), (2), (3)) $P=A=2$, $P^{(2)}=AP-2B=4+2=6$, $P^{(3)}=AP^{(2)}-BP+3C=12+2-$ $-6=8$, $P^{(4)}=AP^{(3)}-BP^{(2)}+CP=16+6-4=18$, $P^{(5)}=AP^{(4)}-$ $-BP^{(3)}+CP^{(2)}=36+8-12=32$, $P^{(6)}=AP^{(5)}-BP^{(4)}+CP^{(3)}=64+$ $+18-16=66$; e quindi per la formola (a) del numero precedente si otterranno $P^{(1,2)}=P.P^{(2)}-P^{(3)}=12-8=4$, $P^{(4,2)}=P^{(4)}.P^{(2)}-P^{(6)}=108-66=$ $=42$, $P^{(1,5)}=P.P^{(5)}-P^{(6)}=64-66=-2$, donde si dedurrà

$$P^{(1,2,3)}=32-42+2=-8.$$

171. Se nel valore di $P^{(m,n,p,q,r,\ldots)}$ si metta $m=n$, tutti i termini componenti questo valore medesimo diventano a due a due uguali fra loro. Così per esempio il valore di $P^{(m,n,p)}$, allorchè tre sole sono le radici, cioè α, β, γ, essendo

$$\alpha^m\beta^n\gamma^p+\alpha^m\gamma^n\beta^p+\beta^m\alpha^n\gamma^p+\beta^m\gamma^n\alpha^p+\gamma^m\beta^n\alpha^p+\gamma^m\alpha^n\beta^p,$$

ove si faccia $m=n$ risulterà uguale a

$$2\alpha^m\beta^n\gamma^p+2\alpha^m\gamma^n\beta^p+2\beta^m\gamma^n\alpha^p.$$

Donde si fa noto che, nella supposizione di $m=n$, per ottenere la somma dei soli termini disuguali che si trovano nel valore di $P^{(m,n,p,q,r,\ldots)}$, farà d'uopo dividere per 2 questo stesso valore. Dippiù se $m=n=p$, tutti i termini di $P^{(m,n,p,q,r,\ldots)}$ risultano a sei a sei uguali fra loro; così per esempio uguali fra loro risultano i termini $\alpha^m\beta^n\gamma^p\ldots$, $\alpha^m\gamma^n\beta^p\ldots$, $\beta^m\alpha^n\gamma^p\ldots$, $\beta^m\gamma^n\alpha^p\ldots$, $\gamma^m\alpha^n\beta^p\ldots$, $\gamma^m\beta^n\alpha^p\ldots$ Si otterrà quindi la somma dei soli termini disuguali che s'incontrano nel valore di $P^{(m,n,p,q,r,\ldots)}$ allorchè $m=n=p$, dividendo per 6 ossia per 2.3 questo valore medesimo. Nella istessa guisa si comprenderà che ove si volesse la somma dei soli termini disuguali del valore di $P^{(m,n,p,q,r,\ldots)}$ allorchè $m=n=p=q$, si dovrebbe $P^{(m,n,p,q,r,\ldots)}$ dividere per 24 ossia per 2.3.4 ec. ec. . . . .

172. Data la equazione (Φ), si cerca di trasformarla in un'altra le cui radici sieno uguali a quelle della proposta moltiplicate per h. Nella equazione (Φ) si metta $x=\frac{y}{h}$; si otterrà

$$\frac{y^m}{h^m}-A\frac{y^{m-1}}{h^{m-1}}+B\frac{y^{m-2}}{h^{m-2}}-C\frac{y^{m-3}}{h^{m-3}}+D\frac{y^{m-4}}{h^{m-4}}-\ldots\pm T=0,$$

donde deducesi

$$y^m-Ahy^{m-1}+Bh^2y^{m-2}-Ch^3y^{m-3}+Dh^4y^{m-4}-\ldots\pm Th^m=0.$$

Or io dico che questa è la cercata equazione.

Infatti le radici di siffatta equazione sono rappresentate dalla y. Ma $y=hx$. Dunque ec.

La equazione

$$y^m - Ahy^{m-1} + Bh^2y^{m-2} - Ch^3y^{m-3} + Dh^4y^{m-4} - \ldots \pm Th^m = 0;$$

non differisce dalla proposta (Φ) se non in questo, che cioè i suoi termini trovansi rispettivamente moltiplicati per i termini della serie

$$1,\ h,\ h^2,\ h^3,\ h^4,\ \ldots,\ h^m;$$

Adunque volendo trasformare una data equazione in un'altra che abbia le radici ugnali a quelle della proposta moltiplicate per h, basterà solamente moltiplicare i termini della equazione data per i rispettivi termini della succennata serie.

Propongasi per esempio la equazione

$$x^2 - 13x + 42 = 0,$$

le cui radici sono $x=7$ ed $x=6$. Volendola trasformare in un'altra che abbia le radici medesime moltiplicate per 3, si dovranno i tre suoi termini x^2, $-13x$, 42 moltiplicare rispettivamonte per 1, 3, 3^2, ossia per 1, 3, 9; sarà cioè

$$x^2 - 39x + 378 = 0$$

la equazione di cui le radici sono $x=21=3.7$ ed $x=18=3.6$. Adunque se i termini della (Φ) si moltiplichino rispettivamente per i termini della serie

$$1,\ \frac{h}{k},\ \frac{h^2}{k^2},\ \frac{h^3}{k^3},\ \frac{h^4}{k^4},\ \ldots\ldots$$

la equazione che da siffatta moltiplicazione si ottiene, cioè

$$x^m - A\frac{h}{k}x^{m-1} + B\frac{h^2}{k^2}x^{m-2} - C\frac{h^3}{k^3}x^{m-3} + D\frac{h^4}{k^4}x^{m-4} - \ldots \pm T\frac{h^m}{k^m} = 0,$$

ha le sue radici ugnali a quelle della (Φ) moltiplicate per $\frac{h}{k}$.

173. Cerchisi ora di trasformare una data equazione in un'altra, di cui le radici in quanto al valore assoluto sieno ugnali a quelle della proposta, ma in quanto al segno lo abbiano del tutto contrario. Dinotando le x le radici della proposta, facciasi in questa $x=-y$, le $y=-x$ dinoteranno le radici della trasformata che si domanda. Adunque si trasformerà una equazione qualunque in un'altra in modo che le radici positive conservando il loro valore divengano negative, e le negative si cangino in positive, mutando x in $-x$. Se la equazione è di grado pari, siccome le potenze pari di x non soffrono alcuna mutazione, i soli termini che si trovano in posto pari dovranno mutare i segni. Al contrario se la equazione è di grado dispari, dovranno mutare i segni tutti i termini che sono in posto dispari; ma poichè, salva la equazione, si possono mutare i segni

a tutti i termini, anche in tal caso il problema si risolverà col semplicemente mutare i segni ai termini situati in posto pari. Per esempio nella equazione

$$x^2-13x+42=0,$$

che ha per radici $x=7$ ed $x=6$, mutando al secondo termine il segno, si otterrà

$$x^2+13x+42=0\,,$$

e questa avrà per radici $x=-7$ ed $x=-6$.

174. Data una equazione qualunque (Φ), potrà essa trasformarsi in un'altra che abbia le sue radici uguali a quelle della proposta diminuite della quantità h. Infatti pongasi nella (Φ) $x=h+y$, avremo

$$(h+y)^m-A(h+y)^{m-1}+B(h+y)^{m-2}-C(h+y)^{m-3}+D(h+y)^{m-4}- \\ -\ldots\pm T=0\,;$$

e quindi con la formola di Newton (124) sviluppando le potenze $(h+y)^m$, $(h+y)^{m-1}$, $(h+y)^{m-2}$, $(h+y)^{m-3}$, $(h+y)^{m-4}$, ec. ricaveremo

$$0=h^m+mh^{m-1}y+\frac{m(m-1)}{2}h^{m-2}y^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}h^{m-3}y^3+\ldots-$$

$$-Ah^{m-1}-(m-1)Ah^{m-2}y-\frac{(m-1)(m-2)}{2}Ah^{m-3}y^2-$$

$$-\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3}Ah^{m-4}y^3-\ldots+$$

$$+Bh^{m-2}+(m-2)Bh^{m-3}y+\frac{(m-2)(m-3)}{2}Bh^{m-4}y^2+\ldots\ldots-$$

$$-Ch^{m-3}-(m-3)Ch^{m-4}y-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$$+Dh^{m-4}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\pm T,$$

da cui, mettendo

$$A'=h^m-Ah^{m-1}+Bh^{m-2}-Ch^{m-3}+Dh^{m-4}-\ldots\ldots\ldots\pm T,$$

$$B'=mh^{m-1}-(m-1)Ah^{m-2}+(m-2)Bh^{m-3}-(m-3)Ch^{m-4}+\ldots\mp S,$$

$$C'=\frac{m(m-1)}{2}h^{m-2}-\frac{(m-1)(m-2)}{2}Ah^{m-3}+\frac{(m-2)(m-3)}{2}Bh^{m-4}-\ldots\pm R,$$

$$D'=\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}h^{m-3}-\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3}Ah^{m-4}+\ldots\mp Q,$$

ec. . . . ec. . . . . .

si dedurrà

$$A'+B'y+C'y^2+D'y^3+\ldots=0.$$

Or questa è la equazione che si domanda; perocchè le sue radici sono le y uguali alle $x-h$. Siffatta equazione è scritta con ordine inverso, cominciando cioè dal termine ultimo si passa al penultimo, e da questo agli altri gradatamente. È chiaro poi che l' ultimo termine A' è precisamente ciocchè addiviene il primo membro della equazione (Φ) allorchè in luogo di x si sostituisce h. Che se ciascun termine di A' si moltiplichi per il rispettivo esponente di h, e quindi si divida per h, si otterrà il coefficiente B' del termine penultimo, nel quale coefficiente mancherà T; perchè in questo essendo $=0$ l' esponente di h, il prodotto di T per zero sarà eziandio $=0$. Similmente se ciascuno dei termini di B' si moltiplichi per il rispettivo esponente di h, e quindi si divida per $2h$, risulterà il coefficiente C', in cui mancherà S per la ragione medesima per la quale nel valore di B' mancava T. In ugual modo se ciascuno dei termini di C' si moltiplichi per il rispettivo esponente di h e poi dividasi per $3h$, si avrà il coefficiente D'. In una maniera analoga si otterranno i coefficienti di tutti gli altri termini della trasformata. Per più di chiarezza scriverò i valori di A', B', C', D', ... nel modo seguente

$$A'=h^m-Ah^{m-1}+Bh^{m-2}-Ch^{m-3}+Dh^{m-4}-\ldots\mp Qh^3\pm Rh^2\mp Sh\pm T,$$

$$B'=mh^{m-1}-(m-1)Ah^{m-2}+(m-2)Bh^{m-3}-(m-3)Ch^{m-4}+\ldots\mp$$
$$\mp 3Qh^2\pm 2Rh\mp S,$$

$$C'=\frac{m(m-1)}{2}h^{m-2}-\frac{(m-1)(m-2)}{2}Ah^{m-3}+\frac{(m-2)(m-3)}{2}Bh^{m-4}-$$
$$-\ldots\mp 3Qh\pm R,$$

$$D'=\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}h^{m-3}-\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3}Ah^{m-4}+\ldots\mp Q,$$

ec. ec. . . . .

Se la equazione (Φ) si volesse trasformare in un' altra, le radici della quale agguagliassero quelle della data accresciute di h, dovrebbe porsi $x=y-h$; dal che apparisce niun' altra cosa doversi fare di nuovo, che mettere $-h$ in luogo di h nei risultamenti già ottenuti.

175. Si abbia la equazione

$$x^4-2x^3+3x^2-4x+5=0,$$

la quale vogliasi trasformare in un' altra, le cui radici agguaglino quelle della proposta diminuite della quantità h. I coefficienti dei termini della trasformata sono (174)

$$A'=h^4-2h^3+3h^2-4h+5,$$
$$B'=4h^3-6h^2+6h-4,$$
$$C'=6h^2-6h+3,$$
$$D'=4h-2,$$
$$E'=1,$$

e quindi la trasformata medesima dovrà esprimersi con

$$y^4-(4h-2)y^3+(6h^2-6h+3)y^2+(4h^3-6h^2+6h-4)y+h^4-2h^3+3h^2-$$
$$-4h+5=0.$$

Pongasi in questa $h=-1$, la equazione risultante

$$y^4-6y^3+15y^2-20y+15=0$$

avrà per radici quelle della proposta tutte però accresciute di 1.

176. Quantunque le due espressioni $(h+y)^m$, $(y+h)^m$, sieno in quanto al valore del tutto identiche, nondimeno i loro sviluppi differiscono in riguardo all' ordine dei termini. L' istesso dovrà dirsi delle due espressioni $(h+y)^{m-1}$, $(y+h)^{m-1}$, come ancora delle altre due $(h+y)^{m-2}$, $(y+h)^{m-2}$, ec. ec. . . . Ponendo adunque nella equazione (Φ) $x=y+h$, la trasformata

$$(y+h)^m-A(y+h)^{m-1}+B(y+h)^{m-2}-C(y+h)^{m-3}+\ .\ .\ .=0,$$

ovvero

$$y^m+mhy^{m-1}+\frac{m(m-1)}{2}h^2y^{m-2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}h^3y^{m-3}+\ldots-$$
$$-Ay^{m-1}\quad-(m-1)Ahy^{m-2}-\frac{(m-1)(m-2)}{2}Ah^2y^{m-3}-\ldots+$$
$$+By^{m-2}\qquad+(m-2)Bhy^{m-3}+\ldots-$$
$$-Cy^{m-3}-\ldots=0;$$

cioè

$$y^m+(mh-A)y^{m-1}+\left(\frac{m(m-1)}{2}h^2-(m-1)Ah+B\right)y^{m-2}+$$
$$+\left(\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}h^3-\frac{(m-1)(m-2)}{2}Ah^2+(m-2)Bh-C\right)y^{m-3}+\ldots=0$$

non in altro differirà da quella ottenuta sopra (174), che nell' ordine dei termini; Facciasi $h=\frac{A}{m}$, sarà $mh-A=0$, sicchè nella trasformata mancherà il secondo termine. Per trasformare adunque una data equazione in un'altra, in cui manchi il secondo termine, farà d' uopo trasformarla in guisa che le radici della trasformata sieno uguali a quelle della proposta diminuite della quantità $\frac{A}{m}$.

Sia per esempio da trasformarsi la equazione

$$x^3-15x^2+56x+60=0$$

in un' altra che manchi del secondo termine. Dovrà la trasformata esser tale che le sue radici uguaglino le radici della proposta diminuite della quantità $\frac{15}{3}=5$. Pongasi perciò $h=5$, essendo $m=3$, $A=15$, $B=56$, e $C=-60$, si

avrà $mh-A=0$, $\frac{m(m-1)}{2}h^2-(m-1)Ah+B=-19$, $\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}h^3-$ $-\frac{(m-1)(m-2)}{2}Ah^2+(m-2)Bh-C=90$. Laonde sarà

$$y^3-19y+90=0$$

la trasformata che si domandava.

Pongasi inoltre $\frac{m(m-1)}{2}h^2-(m-1)Ah+B=0$, sarà $h^2-\frac{2A}{m}h+$ $+\frac{2B}{m^2-m}=0$, donde deducesi $h=\frac{A}{m}\pm\sqrt{\frac{A^2}{m^2}-\frac{2B}{m^2-m}}$. Per trasformare adunque una data equazione in un' altra che sia priva del terzo termine, dovranno le radici della trasformata agguagliare quelle della proposta diminuite di $h=\frac{A}{m}\pm\sqrt{\frac{A^2}{m^2}-\frac{2B}{m^2-m}}$.

In simil guisa si potrà togliere da una data equazione il quarto, il quinto termine, e gli altri. Ma ciò per lo più è inutile, la mancanza del secondo termine è spesso utilissima.

176. Si dia ora una qualunque equazione (Φ), in cui $-M$ esprima il massimo coefficiente negativo, e propongasi di trasformarla in un' altra che abbia le sue radici uguali a quelle della data diminuite della quantità $M+1$. Da quanto è detto sopra (174) l'ultimo termine della trasformata si esprimerà con

$$A'=(M+1)^m-A(M+1)^{m-1}+B(M+1)^{m-2}-C(M+1)^{m-3}+\ldots\pm T,$$

il quale è positivo essenzialmente. Poichè essendo

$$\begin{aligned}
&(M+1)^2=(M+1)(M+1)=M(M+1)+M+1,\\
&(M+1)^3=(M+1)(M+1)^2=(M+1)(M(M+1)+M+1)=\\
&\qquad=M(M+1)^2+(M+1)^2=M(M+1)^2+M(M+1)+M+1,\\
&(M+1)^4=(M+1)(M+1)^3=(M+1)(M(M+1)^2+M(M+1)+M+1)=\\
&\qquad=M(M+1)^3+M(M+1)^2+(M+1)^2=M(M+1)^3+M(M+1)^2+\\
&\qquad+M(M+1)+M+1,\\
&\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots
\end{aligned}$$

in generale si potrà mettere

$$(M+1)^m=M(M+1)^{m-1}+M(M+1)^{m-2}+M(M+1)^{m-3}+\ldots+M+1,$$

e quindi sarà

$$\begin{aligned}
A'=&M(M+1)^{m-1}+M(M+1)^{m-2}+M(M+1)^{m-3}+\ldots+M+1-\\
&-A(M+1)^{m-1}+B(M+1)^{m-2}-C(M+1)^{m-3}+\ldots\pm T,
\end{aligned}$$

una espressione essenzialmente positiva quando anche i termini che compongono la seconda linea fossero tutti negativi; perocchè per supposizione si ha che $-M$ è il massimo in fra tutti i coefficienti negativi che s'incontrano nella equazione (Φ).

Inoltre il coefficiente del penultimo termine della trasformata, che si è domandata, sarà

$$B'=m(M+1)^{m-1}-(m-1)A(M+1)^{m-2}+(m-2)B(M+1)^{m-3}-\ldots\mp S,$$

che è altresì positivo; infatti essendo

$$(M+1)^{m-1}=M(M+1)^{m-2}+M(M+1)^{m-3}+\ldots\ldots+M+1,$$

potrà esso esprimersi eziandio come segue

$$B'=mM(M+1)^{m-2}+mM(M+1)^{m-3}+\ldots\ldots+M+1-$$
$$-(m-1)A(M+1)^{m-2}+(m-2)B(M+1)^{m-3}-\ldots\ldots\mp S;$$

ma una tale espressione è evidentemente positiva per la supposizione già fatta, che cioè $-M$ sia il massimo tra tutti i coefficienti negativi che si ritrovano nella proposta equazione (Φ). Adunque ec.

Con ragionamenti analoghi ai già fatti si dimostrerebbe che gli altri coefficienti C', D', ... della trasformata sono tutti positivi. Adunque *se* $-$M *dinoti il massimo coefficiente negativo in una data equazione* (Φ), *ed in essa si ponga* $x=y+M+1$, *o che è lo stesso, si trasformi essa in un' altra che abbia le radici uguali alle radici della data diminuite però della quantità* $M+1$, *la trasformata avrà tutti i suoi termini positivi.*

Si abbia la equazione

$$x^3-15x^2-7x-2=0.$$

In questa il massimo coefficiente negativo è -15; e però, ove la medesima voglia trasformarsi in un'altra, di cui tutti i termini sieno positivi, si potrà avere questa trasformata diminuendo le radici della proposta della quantità $15+1$, ovvero, che è lo stesso, ponendo $x-16=y$, indicando così con y le radici della trasformata. Ed infatti in tale supposizione i coefficienti della equazione trasformata saranno (174)

$$A'=16^3-15.16^2-7.16-2=142,$$
$$B'=3.16^2-2.15.16-7=281,$$
$$C'=3.16-15=33,$$
$$D'=1,$$

donde si dedurrà la trasformata medesima

$$y^3+33y^2+281y+142=0.$$

177. Una equazione che ha tutti i suoi termini positivi non può avere alcuna radice reale e positiva (165); segue da ciò che le radici reali della trasformata, della quale si è tenuto ragionamento nel numero precedente, dovranno essere tutte negative. Or una qualunque di siffatte radici si esprime per $x-M-1$; dovrà quindi essere $x-M-1<0$, e perciò $x<M+1$. Adunque *in ogni equazione il massimo coefficiente negativo preso positivamente ed accresciuto della unità, è maggiore di qualunque radice positiva della equazione medesima.*

178. Per *limite* delle radici positive di una data equazione qualunque, s'intende quella quantità che è maggiore di tutte le radici positive della medesima equazione. Per un tal limite potrà sempre (177) prendersi il massimo coefficiente negativo della equazione accresciuto della unità. Non sempre però il massimo coefficiente negativo col segno positivo aggiunto alla unità ci dà il limite più prossimo delle radici positive. Per ottenerlo converrà cercare il minimo valore di h che rende positive tutte le quantità A', B', C', D', . . . poichè in tal caso tutti i termini della trasformata riuscendo positivi, le radici reali della medesima, cioè le $y=x-h$, dovranno essere negative, per la qual cosa saranno le $x<h$, e perciò h rappresenterebbe il limite più prossimo. Si prenda per esempio la equazione

$$x^4-2x^3+3x^2-4x+5=0$$

proposta sopra (175), ove -4 essendo il massimo coefficiente negativo, potrebbe rappresentarsi col numero 5 il limite delle radici positive. Ma a fine di avere, se sia possibile, questo limite più prossimo alle radici, cerchiamo il valore di h che rende positive le quantità

$$A'=h^4-2h^3+3h^2-4h+5,$$
$$B'=4h^3-6h^2+6h-4,$$
$$C'=6h^2-6h+3,$$
$$D'=4h-2,$$
$$E'=1.$$

Primieramente $h=1$ rende positiva la quantità D' ed un valore qualunque di h maggiore di 1 fa lo stesso effetto. Anche C' è resa positiva da $h=1$, ma questo valore rende $B'=0$; onde convien prendere $h=2$, e siccome un tal valore di h rende ancora A' positiva, sarà 2 un limite più prossimo delle radici positive della proposta equazione.

Con simigliante metodo si dimostrerebbe esser 7 un limite più prossimo delle radici positive della equazione

$$x^4-5x^3-6x^2-19x+7=0,$$

e 6 quello delle radici positive della seguente altra

$$x^5-3x^4-8x^3-25x^2+4x-39=0.$$

Il limite del quale si è finora parlato è il limite *superiore* delle radici positive;

il limite *inferiore* delle radici medesime più prossimo che il zero, si determina nella seguente guisa. Nella equazione che si propone mettasi $x=\frac{1}{y}$, la trasformata conterrà i medesimi coefficienti della proposta, ma scritti con ordine inverso. Or conseguita dalla supposta relazione tra x ed y che al più grande dei valori positivi di y debba corrispondere il più piccolo dei valori positivi di x; dinotando dunque con l il limite superiore delle radici positive della trasformata, il limite inferiore delle radici positive della proposta sarà$=\frac{1}{l}$.

Una quantità negativa, della quale il valore assoluto è maggiore o minore di tutti i valori assoluti delle radici negative di una data equazione dicesi *limite superiore* o *inferiore* delle radici negative della equazione medesima. Il limite superiore delle radici negative di una data equazione si ottiene come segue. Nella proposta facciasi $x=-y$, le radici positive della trasformata col segno $-$ esprimeranno le radici negative della proposta; determinando adunque il limite superiore delle radici positive della trasformata e ponendolo $=l$, sarà $-l$ il limite superiore delle radici negative della proposta.

Finalmente nella data equazione ponendo $x=-\frac{1}{y}$, e dinotando con l il limite superiore delle radici positive della trasformata, esprimerà $-\frac{1}{l}$ il limite inferiore delle radici negative della proposta.

179. Sieno come sopra $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ le m radici della equazione (Φ), e cerchisi di trasformare questa in un' altra la quale abbia le radici uguali alle potenze n^{sime} delle radici della medesima (Φ). Le radici della trasformata dovendo essere α^n, β^n, γ^n, δ^n, . . . , dessa ascenderà a quel grado stesso a cui ascende la proposta; potrà perciò questa trasformata rappresentarsi per

$$y^m-A'y^{m-1}+B'y^{m-2}-C'y^{m-3}+D'y^{m-4}-\ \ldots\ldots\ \pm T'=0,$$

nella quale altro non resta che a determinare i coefficienti A', B', C', D', . . . Or questi coefficienti si deducono agevolmente da ciò che è detto sopra (166. 171). Infatti

$$A'=\alpha^n+\beta^n+\gamma^n+\delta^n+\ldots=P^{(n)},$$

$$B'=\alpha^n\beta^n+\alpha^n\gamma^n+\alpha^n\delta^n+\ldots+\beta^n\gamma^n+\beta^n\delta^n+\ldots+\gamma^n\delta^n+\ldots=\frac{P^{(n,n)}}{2},$$

$$C'=\alpha^n\beta^n\gamma^n+\alpha^n\beta^n\delta^n+\ldots+\beta^n\gamma^n\delta^n+\ldots=\frac{P^{(n,n,n)}}{2.3},$$

$$D'=\alpha^n\beta^n\gamma^n\delta^n+\ldots=\frac{P^{(n,n,n,n)}}{2.3.4},\ \text{ec.}\ \ldots$$

Vogliasi per esempio trasformare la equazione

$$x^3-2x^2+x-1=0$$

in un' altra, le cui radici sieno i quadrati delle radici della proposta. In tal caso i tre coefficienti A', B', C' della trasformata

$$y^3-A'y^2+B'y-C'=0$$

saranno rispettivamente uguali a $P^{(2)}$, $\frac{P^{(2,2)}}{2}$, $\frac{P^{(2,2,2)}}{2.3}$. Ma (167.169) $P^{(2)}=AP-2B$, $P^{(2,2)}=P^{(2)}.P^{(2)}-P^{(4)}$, $P^{(2,2,2)}=P^{(2,2)}.P^{(2)}-2P^{(4,2)}=(P^{(2)}.P^{(2)}-P^{(4)})P^{(2)}-2(P^{(4)}.P^{(2)}-P^{(6)})$; ed essendo $A=2$, $B=1$, $C=1$, si ottengono $P=A=2$, $P^{(2)}=AP-2B=4-2=2$, $P^{(3)}=AP^{(2)}-BP+3C=4-2+3=5$, $P^{(4)}=AP^{(3)}-BP^{(2)}+CP=10-2+2=10$, $P^{(5)}=AP^{(4)}-BP^{(3)}+CP^{(2)}=20-5+2=17$, $P^{(6)}=AP^{(5)}-BP^{(4)}+CP^{(3)}=34-10+5=29$. Risulteranno quindi

$$A'=P^{(2)}=2,$$

$$B'=\frac{P^{(2)}.P^{(2)}-P^{(4)}}{2}=-3,$$

$$C'=\frac{(P^{(2)}.P^{(2)}-P^{(4)})P^{(2)}-2(P^{(4)}.P^{(2)}-P^{(6)})}{2.3}=1,$$

e conseguentemente la trasformata in questione sarà

$$y^3-2y^2-3y-1=0,$$

le cui radici equivarranno ai quadrati delle radici della proposta.

180. Pongo termine alla teoria delle trasformazioni delle equazioni risolvendo il seguente problema. Trasformare una equazione qualunque (Φ) in un'altra che abbia per radici tutte le somme possibili ad ottenersi con le radici α, β, γ, δ, ... della proposta prese a due a due, cioè le somme

$$\alpha+\beta,\ \alpha+\gamma,\ \alpha+\delta,\ \ldots,\ \beta+\gamma,\ \beta+\delta,\ \ldots,\ \gamma+\delta,\ \ldots.$$

Supponendo $=m$ il numero delle radici della (Φ), il numero di queste somme sarà $=\frac{m(m-1)}{2}$. Infatti la prima di quelle radici, cioè α, con le altre β, γ, δ, ... costituisce $m-1$ somme $\alpha+\beta$, $\alpha+\gamma$, $\alpha+\delta$, ...; la seconda β con le altre α, γ, δ, ... costituisce parimenti $m-1$ somme $\beta+\alpha$, $\beta+\gamma$, $\beta+\delta$, ...; e così appresso. Laonde il numero di tutte queste somme sarà $m(m-1)$. Conviene pertanto riflettere che in questo numero ciascuna somma, come per esempio $\alpha+\beta$, s'incontra due volte, una volta perchè ad α si aggiugne β, ed un'altra perchè a β si aggiugne α: essendo dunque una stessa cosa $\alpha+\beta$ e $\beta+\alpha$, farà d'uopo dividere per 2 il numero $m(m-1)$ a fine di ottenere il domandato numero di tutte le somme possibili a formarsi con le m radici della (Φ) prese a due a due.

Da quanto è detto, chiaro apparisce che il grado della trasformata in questione dovrà essere $=\frac{m(m-1)}{2}$ (164). Or se per brevità questo numero si pone $=n$, la trasformata sarà del grado n^{simo}, e potrà esprimersi generalmente per

$$y^n-A'y^{n-1}+B'y^{n-2}-C'y^{n-3}+D'y^{n-4}-\ldots\pm T'=0,$$

di cui non rimane altro che a determinare i coefficienti A', B', C', D', ... Per determinarli più agevolmente, rappresentiamo con $Q^{(r)}$ la somma delle potenze

r^{sime} delle radici di qnesta trasformata, sia cioè

$$Q^{(r)}=(\alpha+\beta)^r+(\alpha+\gamma)^r+(\alpha+\delta)^r+..+(\beta+\gamma)^r+(\beta+\delta)^r+..+(\gamma+\delta)^r...$$

Svilnppando i singoli binomii del secondo membro, questo conterrà primieramente la somma delle potenze r^{sime} delle radici della proposta moltiplicate per $m-1$, perchè in $m-1$ binomii è compresa ciascuna di siffatte radici; conterrà inoltre la somma dei termini della forma $\alpha^{r-1}\beta$ moltiplicati per r; la somma in terzo luogo dei termini della forma $\alpha^{r-2}\beta^2$ moltiplicati per $\frac{r(r-1)}{2}$; e così di seguito. Nella ipotesi poi di r pari il nnmero dei termini dello svilnppo di ciascun binomio è dispari; e quindi sommando i termini medii, dei quali per ciascun binomio ve ne ha un solo della forma $\alpha^{\frac{r}{2}}\beta^{\frac{r}{2}}$ moltiplicato pel coefficiente $\frac{r(r-1)(r-2)\,...\left(\frac{r+2}{2}\right)}{2.3\,...\,\frac{r}{2}}$, si otterrà la somma dei termini della forma $\alpha^{\frac{r}{2}}\beta^{\frac{r}{2}}$ moltiplicati pel coefficiente medesimo. Ma allorchè r è dispari nello svilnppo di ciascnn binomio dne sono i termini medii della forma $\alpha^{\frac{r+1}{2}}\beta^{\frac{r-1}{2}}$, i cui coefficienti sono ngnali fra loro e si rappresentano per $\frac{r(r-1)(r-2)...\left(\frac{r+3}{2}\right)}{2.3\,....\,\frac{r-1}{2}}$; laonde sommando qnesti termini medii, ne risnlterà la somma di tntti i termini della forma $\alpha^{\frac{r+1}{2}}\beta^{\frac{r-1}{2}}$ moltiplicati per $\frac{r(r-1)(r-2)\,...\left(\frac{r+3}{2}\right)}{2.3\,....\,\frac{r-1}{2}}$. Adunque essendo r pari, sarà (167.169.171)

$$Q^{(r)}=(m-1)P^{(r)}+rP^{(r-1,1)}+\frac{r(r-1)}{2}P^{(r-2,2)}+\,...\,+$$

$$+\frac{r(r-1)(r-2)\,...\left(\frac{r+2}{2}\right)}{2.3\,....\,\frac{r}{2}}\cdot\frac{P^{\left(\frac{r}{2},\frac{r}{2}\right)}}{2},$$

essendo poi r dispari, si otterrà

$$Q^{(r)}=(m-1)P^{(r)}+rP^{(r-1,1)}+\frac{r(r-1)}{2}P^{(r-2,2)}+\,...\,+$$

$$+\frac{r(r-1)(r-2)\ldots\left(\frac{r+3}{2}\right)}{2.3\ldots\frac{r-1}{2}}P^{\left(\frac{r+1}{2},\frac{r-1}{2}\right)}.$$

Ma dalla formola (a), cioè dalla formola

$$P^{(m,n)}=P^{(m)}.P^{(n)}-P^{(m+n)}$$

già dimostrata sopra nel citato numero 169 ricavansi

$$P^{(r-1,1)}=P^{(r-1)}.P-P^{(r)},\ P^{(r-2,2)}=P^{(r-2)}.P^{(2)}-P^{(r)},\ \text{ec.}\ \ldots$$

$$P^{\left(\frac{r}{2},\frac{r}{2}\right)}=P^{\left(\frac{r}{2}\right)}.P^{\left(\frac{r}{2}\right)}-P^{(r)},\ P^{\left(\frac{r+1}{2},\frac{r-1}{2}\right)}=P^{\left(\frac{r+1}{2}\right)}.P^{\left(\frac{r-1}{2}\right)}-P^{(r)};$$

adunque sostituendo siffatti valori, si avrà per r pari

$$Q^{(r)}=(m-1)P^{(r)}+rP^{(r-1)}.P+\frac{r(r-1)}{2}P^{(r-2)}.P^{(2)}+\ldots+$$

$$+\frac{r(r-1)(r-2)\ldots\left(\frac{r+2}{2}\right)}{2.3\ldots\frac{r}{2}}\cdot\frac{P^{\left(\frac{r}{2}\right)}.P^{\left(\frac{r}{2}\right)}}{2}-$$

$$-\left[r+\frac{r(r-1)}{2}+\ldots+\frac{r(r-1)(r-2)\ldots\left(\frac{r+2}{2}\right)}{2.2.3\ldots\frac{r}{2}}\right]P^{(r)},$$

e per r dispari

$$Q^{(r)}=(m-1)P^{(r)}+rP^{(r-1)}.P+\frac{r(r-1)}{2}P^{(r-2)}.P^{(2)}+\ldots+$$

$$+\frac{r(r-1)(r-2)\ldots\left(\frac{r+3}{2}\right)}{2.3\ldots\frac{r-1}{2}}P^{\left(\frac{r+1}{2}\right)}.P^{\left(\frac{r-1}{2}\right)}-$$

$$-\left[r+\frac{r(r-1)}{2}+\ldots+\frac{r(r-1)(r-2)\ldots\left(\frac{r+3}{2}\right)}{2.3\ldots\frac{r-1}{2}}\right]P^{(r)}.$$

Inoltre per r pari essendo

$$2^r=(1+1)^r=1+r+\frac{r(r-1)}{2}+\ldots+\frac{r(r-1)(r-2)\ldots\left(\frac{r+2}{2}\right)}{2.3\ldots\frac{r}{2}}+\ldots+$$

$$+\frac{r(r-1)}{2}+r+1=2+2r+2\,\frac{r(r-1)}{2}+\ldots+\frac{r(r-1)(r-2)\ldots\left(\frac{r+2}{2}\right)}{2.3\,\ldots\,\frac{r}{2}},$$

e per r dispari risultando

$$2^r=(1+1)^r=1+r+\frac{r(r-1)}{2}+\ldots+\frac{r(r-1)(r-2)\ldots\left(\frac{r+3}{2}\right)}{2.3\,\ldots\,\frac{r-1}{2}}+$$

$$+\frac{r(r-1)(r-2)\ldots\left(\frac{r+3}{2}\right)}{2.3\,\ldots\,\frac{r-1}{2}}+\ldots+\frac{r(r-1)}{2}+r+1=$$

$$=2+2r+2\,\frac{r(r-1)}{2}+\ldots+2\,\frac{r(r-1)(r-2)\ldots\left(\frac{r+3}{2}\right)}{2.3\,\ldots\,\frac{r-1}{2}};$$

sarà nella prima supposizione

$$2^{r-1}-1=r+\frac{r(r-1)}{2}+\ldots+\frac{r(r-1)(r-2)\ldots\left(\frac{r+2}{2}\right)}{2.2.3\ldots\frac{r}{2}},$$

e nell' altra

$$2^{r-1}-1=r+\frac{r(r-1)}{2}+\ldots+\frac{r(r-1)(r-2)\ldots\left(\frac{r+3}{2}\right)}{2.3\,\ldots\,\frac{r-1}{2}}.$$

In virtù dei calcoli precedenti allorchè r è pari sarà

$$Q^{(r)}=(m-1)P^{(r)}+rP^{(r-1)}\,.\,P+\frac{r(r-1)}{2}P^{(r-2)}\,.\,P^{(2)}+\ldots\ldots+$$

$$+\frac{r(r-1)(r-2)\ldots\left(\frac{r+2}{2}\right)}{2.3\,\ldots\,\frac{r}{2}}\cdot\frac{P^{\left(\frac{r}{2}\right)}\,.\,P^{\left(\frac{r}{2}\right)}}{2}-(2^{r-1}-1)P^{(r)},$$

e quando r è dispari

$$Q^{(r)}=(m-1)P^{(r)}+rP^{(r-1)}\,.\,P+\frac{r(r-1)}{2}P^{(r-2)}\,.\,P^{(2)}+\ldots\ldots+$$

$$+\frac{r(r-1)(r-2)\ldots\left(\frac{r+3}{2}\right)}{2.3\ldots\frac{r-1}{2}}\cdot P^{\left(\frac{r+1}{2}\right)}\cdot P^{\left(\frac{r-1}{2}\right)}-(2^{r-1}-1)P^{(r)}.$$

Finalmente, poichè $(m-1)P^{(r)}-(2^{r-1}-1)P^{(r)}=(m-1-2^{r-1}+1)P^{(r)}=$ $=(m-2^{r-1})P^{(r)}$, avremo quando r è pari

$$Q^{(r)}=(m-2^{r-1})P^{(r)}+rP^{(r-1)}\cdot P+\frac{r(r-1)}{2}P^{(r-2)}\cdot P^{(2)}+\ldots+$$

$$+\frac{r(r-1)(r-2)\ldots\left(\frac{r+2}{2}\right)}{2.3\ldots\frac{r}{2}}\cdot\frac{P^{\left(\frac{r}{2}\right)}\cdot P^{\left(\frac{r}{2}\right)}}{2},$$

e quando r è dispari

$$Q^{(r)}=(m-2^{r-1})P^{(r)}+rP^{(r-1)}\cdot P+\frac{r(r-1)}{2}P^{(r-2)}\cdot P^{(2)}+\ldots+$$

$$+\frac{r(r-1)(r-2)\ldots\left(\frac{r+3}{2}\right)}{2.3\ldots\frac{r-1}{2}}\cdot P^{\left(\frac{r+1}{2}\right)}\cdot P^{\left(\frac{r-1}{2}\right)}.$$

Da queste formole si dedurranno i valori di Q, $Q^{(2)}$, $Q^{(3)}$, $Q^{(4)}$, ec... Ma (167)

$$Q=A',\ Q^{(2)}=A'Q-2B',\ Q^{(3)}=A'Q^{(2)}-B'Q+3C',$$
$$Q^{(4)}=A'Q^{(3)}-B'Q^{(2)}+C'Q-4D',\ \text{ec. ec.}\ \ldots;$$

donde si determineranno i coefficienti della trasformata, in modo che sia

$$A'=Q,\ B'=\frac{A'Q-Q^{(2)}}{2},\ C'=\frac{B'Q-A'Q^{(2)}+Q^{(3)}}{3},$$

$$D'=\frac{C'Q-B'Q^{(2)}+A'Q^{(3)}-Q^{(4)}}{4},\ \text{ec. ec.}\ldots$$

181. Debbasi trasformare la equazione

$$x^3-9x^2+26x-24=0$$

in un'altra, le cui radici sieno le somme di due qualunque delle radici della proposta. Essendo la data equazione di terzo grado, quella della trasformata sarà del grado $\frac{3(3-1)}{2}=3$, sarà cioè anch'essa di terzo grado, onde la e-

esprimeremo per

$$y^3-A'y^2+B'y-C'=0.$$

Volendo poi determinare i suoi coefficienti A', B', C', avremo per le cose dette

$$A'=Q,\ B'=\frac{A'Q-Q^{(2)}}{2},\ C'=\frac{B'Q-A'Q^{(2)}+Q^{(3)}}{3}.$$

Or dalle formole generali che ci danno il valore di $Q^{(r)}$, ricaviamo

$$Q=2P;\ Q^{(2)}=P^{(2)}+P.P;\ Q^{(3)}=-P^{(3)}+3P^{(2)}.P.$$

Adunque

$$A'=2P,$$

$$B'=\frac{2A'P-(P^{(2)}+P.P)}{2},$$

$$C'=\frac{2B'P-A'(P^{(2)}+P.P)+3P.P^{(2)}-P^{(3)}}{3}.$$

Inoltre paragonando la equazione generale con la proposta, abbiamo $A=9$, $B=26$, $C=24$; sarà quindi (167) $P=A=9$, $P^{(2)}=AP-2B=81-52=$ $=29$, $P^{(3)}=AP^{(2)}-BP+3C=261-234+72=99$, e però

$$A'=2.9=18,$$

$$B'=\frac{18.18-(29+81)}{2}=\frac{324-110}{2}=107,$$

$$C'=\frac{107.18-18(29+81)+3.9.29-99}{3}=\frac{1926-2079+783}{3}=210;$$

onde la trasformata sarà

$$y^3-18y^2+107y-210=0.$$

182. *Se due quantità reali* h, *e* k *sostituite in una equazione in luogo della incognita rendono il primo membro una positivo, e l' altra negativo, la equazione avrà per lo meno una radice reale, i cui limiti saranno* h, *e* k: *ossia la equazione avrà per lo meno una radice reale, la quale sarà minore di una di quelle due quantità e maggiore dell' altra.*

Sia P la somma di tutti i termini positivi della equazione, e $-Q$ la somma di tutti i termini negativi, in modo che si abbia la proposta espressa per $P-Q=0$. Inoltre si suppongano primieramente le quantità h e k ambedue positive e $k>h$. Se posta $x=h$ è il primo membro $P-Q$ positivo, e posta $x=k$ è $P-Q$ negativo, nel primo caso sarà $P>Q$ e nel secondo $P<Q$. Or non vi ha dubbio che le quantità P e Q, essendo composte di termini tutti positivi e di potenze intere di x, crescano al crescere della medesima x, di tal che aumentandosi x per gradi insensibili da h fino a k, esse pure aumentino per gradi insensibili; ma però P crescerà meno di Q, perchè di più grande che era pri-

ma è poi divenuta la più piccola : segue da ciò che tra i due valori di h, e k vi dovrà essere un valore di x tale, per cui si abbia $P=Q$ (*). Adunque questo valore di x medio tra h e k, e che rende $P=Q$, ossia $P-Q=o$, sarà una radice reale della proposta. Se posta $x=h$, fosse $P-Q$ negativo, e posto $x=k$ fosse $P-Q$ positivo, avrebbe luogo il discorso medesimo e solo dovrebbo cangiarsi in esso P in Q, e Q in P.

Suppongasi in secondo luogo che le due quantità h, e k sieno ambedue negative, ovvero che una sia negativa e l'altra positiva. Dinotando con r una terza quantità positiva così grande che le somme $r+h$, $r+k$ risultino positive, se la proposta equazione si trasformasse in un'altra, la quale avesse le radici uguali alle radici della data accresciute della quantità r, se cioè nella proposta si facesse $x=y-r$, e si sostituissero poi successivamente nel primo membro della risultante equazione trasformata in luogo di y i valori $r+h$, $r+k$, si otterrebbero due risultamenti di segno contrario ; poichè sostituire nella trasformata $r+h$, $r+k$ ad $y=r+x$ varrebbe lo stesso che sostituire nella proposta h, k ad x : or da questa sostituzione si hanno per ipotesi risultati di segno contrario. Avrebbe dunque quella trasformata una radice reale compresa tra $r+h$ ed $r+k$, vi sarebbe cioè in essa un valore di $y=r+x$ medio tra $r+h$ ed $r+k$. Ma non potrebbe nella trasformata trovarsi un valore di $y=r+x$ medio tra $r+h$ ed $r+k$, ove nella proposta non si trovasse un valore di x medio tra h, e k. Quindi se due quantità reali h, e k sostituite ec.

Ma quantunque se due quantità h e k, sostituite in luogo di x in una equazione, danno risultati di segni contrarii, possa a ragione dedursi, dover esse per lo meno comprendere una radice reale, non però potrà affermarsi che ne comprendano una solamente, potendone comprendere un numero qualunque dispari. Ciò risulta da una nuova proposizione, che prendiamo a dimostrare : cioè che ***se due quantità* h *e* k *comprendono un numero qualunque dispari di radici reali, i risultati della loro sostituzione in luogo di* x *nella equazione avranno segni contrarii ; e se ne comprendono un numero pari i risultati che si avranno dalla loro sostituzione saranno affetti dal medesimo segno.***

Per far chiara una tal proposizione sieno α, β, γ, . . . le radici della equazione data, le quali si suppongono comprese tra le due quantità h e k, ed Y il prodotto dei fattori del primo grado in x, che corrispondono alle radici reali non comprese, e alle radici immaginarie. Il primo membro della proposta equazione potrà mettersi sotto la forma

$$Y(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ .\ .\ .$$

Sostituendo successivamente in esso h, e k in luogo di x, avremo i due risultati

$$Y'(h-\alpha)(h-\beta)(h-\gamma)\ .\ .\ .$$

$$Y''(k-\alpha)(k-\beta)(k-\gamma)\ .\ .\ .$$

Y' ed Y'' designando ciò che diviene Y allorchè in esso mettesi h, e k in luogo

(*) Questa conseguenza si renderà evidente se quanto è detto si paragoni, dietro le tracce del celebre Lagrange, al caso di due mobili, i quali partendo da due punti differenti percorrono in modo la medesima linea che quello il quale era prima indietro si trovi in seguito più avanti dell'altro ; perchè è chiaro che essi devono essersi incontrati nella loro strada.

di x; queste due quantità Y', Y'' avranno necessariamente lo stesso segno; altrimenti in Y si troverebbe per lo meno una radice reale compresa tra h e k, lo che è contro la ipotesi.

Ciò posto, per determinare più facilmente i segni di quei due risultati, si divida il primo pel secondo; avremo

$$\frac{Y'(h-\alpha)(h-\beta)(h-\gamma)\ \ldots}{Y''(k-\alpha)(k-\beta)(k-\gamma)\ \ldots},$$

ossia

$$\frac{Y'}{Y''}\cdot\frac{h-\alpha}{k-\alpha}\cdot\frac{h-\beta}{k-\beta}\cdot\frac{h-\gamma}{k-\gamma}\ \ldots .$$

Ma le radici α, β, γ, . . . comprendendosi tra h e k, si ha per necessità

$$h > \text{ovvero} < \alpha, \beta, \gamma, \ldots,$$

$$\text{e } k < \text{ovvero} > \alpha, \beta, \gamma, \ldots,$$

dal che si deduce

$$h-\alpha,\ h-\beta,\ h-\gamma,\ \ldots > \text{ovvero} < 0,$$

$$\text{e } k-\alpha,\ k-\beta,\ k-\gamma,\ \ldots < \text{ovvero} > 0;$$

dunque, poichè $h-\alpha$ e $k-\alpha$ hanno segni contrarii, come pure $h-\beta$ e $k-\beta$, $h-\gamma$ e $k-\gamma$, . . ., i quozienti parziali $\frac{h-\alpha}{k-\alpha}$, $\frac{h-\beta}{k-\beta}$, $\frac{h-\gamma}{k-\gamma}$, ... saranno tutti negativi; dall' altra parte $\frac{Y'}{Y''}$ è essenzialmente positivo, giacchè Y' e Y'' hanno il medesimo segno; laonde il prodotto $\frac{Y'}{Y''}\cdot\frac{h-\alpha}{k-\alpha}\cdot\frac{h-\beta}{k-\beta}\cdot\frac{h-\gamma}{k-\gamma}\ldots$ sarà negativo, se le radici α, β, γ . . . comprese fra h e k sono in numero dispari, e positivo se in numero pari. Dunque i due risultati

$$Y'(h-\alpha)(h-\beta)(h-\gamma)\ \ldots$$

$$Y''(k-\alpha)(k-\beta)(k-\gamma)\ \ldots$$

avranno segni contrarii, ovvero gli stessi segni, secondo che le radici comprese tra h e k saranno di numero dispari, ovvero pari.

Da quel che è detto ne segue necessariamente che *se due quantità reali, sostituite in luogo di* x *in una equazione, danno risultati di segni contrarii, comprendono esse per lo meno una radice reale, potendone ancora comprendere un qualunque numero dispari; e se danno risultati del medesimo segno, o non comprendono alcuna radice, ovvero ne comprendono un numero qualunque pari.*

183. *Se una equazione ha l' ultimo termine negativo, avrà per lo meno una radice reale positiva.* Sia questa equazione

$$(\Phi) = x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \ldots - T = 0.$$

Pongasi nella medesima $x=0$, il risultato sarà $-T$, cioè negativo. Inoltre si esprima con l il massimo coefficiente negativo preso col segno contrario ed ac-

cresciuto della unità, e si metta nella proposta $x=l$, il risultato sarà positivo (176). Ma allorchè due valori reali sostituiti ad x in una equazione danno luogo a risultamenti di segni contrarii, questa equazione ha per lo meno una radice reale compresa fra quei due valori (182). Dunque la proposta dovrà avere per lo meno una radice reale compresa fra zero ed l, cioè fra zero ed una quantità positiva, la quale radice sarà perciò positiva. Dunque se una equazione ec.

184. *Una equazione* (Φ) *di grado pari che ha l' ultimo termine negativo ha per lo meno una radice reale negativa.* Imperocchè mettendo $-x$ in luogo di x nella proposta, l' ultimo termine $-T$ essendo situato in posto dispari si rimarrà negativo (173), e quindi la trasformata avrà per lo meno una radice reale positiva (183). Ma le radici della trasformata non differiscono dalle radici della proposta se non in quanto al segno. Adunque la proposta avrà per lo meno una radice reale negativa.

185. *Una equazione* (Φ) *di grado dispari, e che ha l' ultimo termine positivo ha per lo meno una radice reale negativa.* Infatti sostituendo nella proposta $-x$ ad x, l' ultimo termine essendo situato in posto pari (173) muterà il segno in modo che da positivo si farà negativo, e perciò la trasformata avrà per lo meno una radice reale positiva (183). Ma le radici di questa trasformata solo in quanto al segno differiscono dalle radici della proposta (Φ). Dunque la proposta avrà per lo meno una radice reale negativa.

186. Dal detto (183.185) conseguita che una equazione di grado dispari contiene sempre per lo meno una radice reale positiva o negativa; e quindi deducesi che *una equazione di grado dispari ha sempre un numero dispari di radici reali.* Per verità una qualunque equazione (Φ) di grado $m.^{simo}$ può rappresentarsi pel prodotto (164)

$$(\Phi)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\ .\ .\ .\ (x-\omega)=0,$$

esprimendo con $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, \omega$ le sue m radici; onde se il grado m della (Φ) è dispari, questo prodotto contiene un numero dispari di fattori della forma $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$, $x-\delta$, ..., $x-\omega$ perchè dispari è in tal caso il numero delle radici $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, \omega$. Or se si vuole che la (Φ) di grado dispari non contenga un numero dispari di radici reali, essa ne conterrà un numero pari, e conseguentemente nel prodotto (Φ) s'incontrerà un numero pari di fattori reali; per la qual cosa facendo svanire con la divisione questo numero pari di fattori reali, il numero dei rimanenti fattori sarà dispari e darà luogo ad una equazione di grado dispari, la quale perciò avrà un' altra radice reale. Non è dunque vero che una equazione di grado dispari contiene un numero pari di radici reali.

187. *Una equazione di grado pari, se ha radici reali, queste sono sempre di numero pari.* Perocchè se la proposta di grado pari contenesse un numero dispari di radici reali, tolte queste mediante la divisione della equazione medesima per altrettanti fattori, la equazione che quindi risulterebbe sarebbe di grado dispari, ed avrebbe perciò un' altra radice reale. È dunque falso che una equazione di grado pari ha un numero dispari di radici reali.

188. *Una qualunque equazione non può avere che un numero pari di radici immaginarie.* Infatti questa equazione o è di grado pari, o è di grado dispari. Se è di grado pari o non ha radici reali, nel qual caso tutte le sue radici sono immaginarie e di numero pari, o se pur ne ha, dovendo esse essere

di numero pari (187), le rimanenti radici, cioè le immaginarie, saranno eziandio di numero pari. Che se la proposta equazione è di grado dispari, essa ha un numero dispari di radici reali (186), e siccome tutte le sue radici debbono essere di numero dispari, le radici immaginarie dovranno essere, se pur ve ne sono, di numero pari.

189. *Se una equazione ha tutte le sue radici immaginarie, il suo primo membro si manterrà sempre positivo, qualunque quantità reale vi si sostituisca in luogo di* x. Imperocchè questo primo membro non può non avere l'ultimo termine positivo (184); ponendo dunque in esso $x=0$, il risultato sarebbe positivo: ciò posto, se una qualunque quantità reale posta in luogo di x lo rendesse negativo, la proposta avrebbe contro la supposizione una radice reale compresa tra zero e la succennata quantità (182).

190. Nel primo membro della equazione (Φ), in cui si suppongono reali i coefficienti $A, B, C, D, \ldots$ (164), si sostituisca alla x prima $u+v\sqrt{-1}$, e poi $u-v\sqrt{-1}$; essendo (124.125.118)

$$(u+v\sqrt{-1})^m=u^m+mu^{m-1}v\sqrt{-1}-\frac{m(m-1)}{2}u^{m-2}v^2-\ldots=$$
$$=U_1+V_1\sqrt{-1},$$
$$(u-v\sqrt{-1})^m=u^m-mu^{m-1}v\sqrt{-1}-\frac{m(m-1)}{2}u^{m-2}v^2+\ldots=$$
$$=U_1-V_1\sqrt{-1};$$
$$(u+v\sqrt{-1})^{m-1}=u^{m-1}+(m-1)u^{m-2}v\sqrt{-1}-\frac{(m-1)(m-2)}{2}u^{m-3}v^2-$$
$$-\ldots=U_2+V_2\sqrt{-1},$$
$$(u-v\sqrt{-1})^{m-1}=u^{m-1}-(m-1)u^{m-2}v\sqrt{-1}-\frac{(m-1)(m-2)}{2}u^{m-3}v^2+$$
$$+\ldots=U_2-V_2\sqrt{-1};$$
$$(u+v\sqrt{-1})^{m-2}=u^{m-2}+(m-2)u^{m-3}v\sqrt{-1}-\frac{(m-2)(m-3)}{2}u^{m-4}v^2-$$
$$-\ldots=U_3+V_3\sqrt{-1},$$
$$(u-v\sqrt{-1})^{m-2}=u^{m-2}-(m-2)u^{m-3}v\sqrt{-1}-\frac{(m-2)(m-3)}{2}u^{m-4}v^2+$$
$$+\ldots=U_3-V_3\sqrt{-1};$$
ec. ec. . . . . . .

quel primo membro nell'un caso si ridurrà ad $U+V\sqrt{-1}$, e nel secondo ad $U-V\sqrt{-1}$; Or non potendo mai accadere che sia $U+V\sqrt{-1}=0$ senza che si abbia pure (119) $U-V\sqrt{-1}=0$, ne segue che ove la (Φ) resti soddisfatta con $x=u+v\sqrt{-1}$, lo sarà eziandio con $x=u-v\sqrt{-1}$; non potrà cioè la equazione (Φ) ammettere una radice immaginaria della forma $u+v\sqrt{-1}$

senza che ammetta altresì la sua coniugata (120) $u-v\sqrt{-1}$. Confermasi con siffatta dottrina il teorema già dimostrato sopra (188), che cioè il numero delle radici immaginarie di una equazione qualunque non può essere che pari. Abbiamo inoltre

$$(x-u-v\sqrt{-1})(x-u+v\sqrt{-1})=x^2-2ux+u^2+v^2=(x-u)^2+v^2\ ;$$

e però nella medesima ipotesi il primo membro della equazione (Φ) si potrà risolvere in fattori reali di primo o di secondo grado.

191. Sia data una equazione qualunque

$$(\Phi)=x^m-Ax^{m-1}+Bx^{m-2}-Cx^{m-3}+\ .\ .\ .\ \mp Sx\pm T=0,$$

di cui le radici reali disposte per ordine di grandezza sieno α, β, γ, δ, . . . , τ, in modo che sia prima scritta la massima positiva, e poi le altre gradatamente minori, e riguardo alle negative sia scritta prima quella che, prescindendo dal segno, è minore. Se si chiami F il prodotto dei fattori immaginarii che la proposta può contenere, la medesima potrà esprimersi come segue

$$(\Phi)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\ .\ .\ .\ (x-\tau)F=0,$$

Posto ciò io dico che se ciascun termine della proposta si moltiplichi pel proprio esponente, poi si divida per x, e quindi si metta

$$(\Phi')=mx^{m-1}-(m-1)Ax^{m-2}+(m-2)Bx^{m-3}-(m-3)Cx^{m-4}+\ldots\mp S=0,$$

saranno tutte le radici reali della (Φ) limiti delle radici reali della equazione (Φ'), cioè (182) tra ogni due radici reali della equazione (Φ) se ne conterrà una della equazione (Φ'). Infatti mettendo nella proposta (Φ) $x+\alpha$ in luogo di x, l'ultimo termine della trasformata sarà (174)

$$m\alpha^{m-1}-(m-1)A\alpha^{m-2}+(m-2)B\alpha^{m-3}-(m-3)C\alpha^{m-4}+\ .\ .\ .\ \mp S.$$

Per verità l' ultimo termine della trasformata dovrebbe essere

$$\alpha^m-A\alpha^{m-1}+B\alpha^{m-2}-C\alpha^{m-3}+\ .\ .\ .\ \pm T\ ;$$

ma per ipotesi essendo α una delle radici della proposta equazione (Φ), quest'ultimo termine è $=0$, perciò il coefficiente del penultimo termine che è

$$m\alpha^{m-1}-(m-1)A\alpha^{m-2}+(m-2)B\alpha^{m-3}-(m-3)C\alpha^{m-4}+\ .\ .\ .\ \mp S,$$

fatta la divisione di tutta la equazione per x, figurerà da ultimo termine.

Quindi consegnita che il grado della succennata equazione trasformata dovrà essere $=m-1$. Confermasi ciò dal perchè nella medesima (Φ), ma tradotta alla forma

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\ .\ .\ .\ (x-\tau)F=0,$$

sostituendo $x+\alpha$ ad x, il fattore $x-\alpha$ risultando uguale ad x, fatta, come è

dovere, la divisione per x, quella trasformata sarebbe espressa da

$$(x+\alpha-\beta)(x+\alpha-\gamma)(x+\alpha-\delta)\ldots(x+\alpha-\tau)G=0,$$

dove G è la quantità in cui si muta F allorchè ad x vi si sostituisce $x+\alpha$: or questa equazione contiene evidentemente un numero di fattori di primo grado di una unità minore del numero dei fattori di primo grado che si contengono nella proposta; essendo dunque m il grado della proposta, quello della trasformata in questione sarà $m-1$.

Esprimendo pertanto

$$(x+\alpha-\beta)(x+\alpha-\gamma)(x+\alpha-\delta)\ldots(x+\alpha-\tau)G=0$$

questa trasformata, l' ultimo suo termine preso col segno proprio, o col segno mutato secondo che $m-1$ è pari ovvero dispari, potrà eziandio rappresentarsi col prodotto (166)

$$(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)\ldots(\alpha-\tau)G_1,$$

in cui G_1, è ciò che diventa F allorchè ad x vi si sostituisce α. Adunque sarà

$$m\alpha^{m-1}-(m-1)A\alpha^{m-2}+(m-2)B\alpha^{m-3}-(m-3)C\alpha^{m-4}+\ldots\mp S=$$
$$=(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)\ldots(\alpha-\tau)G_1,$$

Con un ragionamento del tutto analogo al precedente si dimostreranno le seguenti uguaglianze

$$m\beta^{m-1}-(m-1)A\beta^{m-2}+(m-2)B\beta^{m-3}-(m-3)C\beta^{m-4}+\ldots\mp S=$$
$$=(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)\ldots(\beta-\tau)G_2,$$

$$m\gamma^{m-1}-(m-1)A\gamma^{m-2}+(m-2)B\gamma^{m-3}-(m-3)C\gamma^{m-4}+\ldots\mp S=$$
$$=(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)\ldots(\gamma-\tau)G_3,$$

$$m\delta^{m-1}-(m-1)A\delta^{m-2}+(m-2)B\delta^{m-3}-(m-3)C\delta^{m-4}+\ldots\mp S=$$
$$=(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)\ldots(\delta-\tau)G_4,$$

ec. ec. . . . .

in cui G_2, G_3, G_4 sono i valori di F quando vi si pone successivamente $x=\beta$, $=\gamma$, $=\delta$, . . .

Or rappresentando G_1, G_2, G_3, G_4, . . . quantità essenzialmente positive (188. 190), ed essendo per ipotesi $\alpha>\beta>\gamma>\delta>\ldots>\tau$, sarà il prodotto $(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)\ldots(\alpha-\tau)G_1$ positivo, il prodotto $(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)\times(\beta-\delta)\ldots(\beta-\tau)G_2$ negativo, il prodotto $(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)\ldots(\gamma-\tau)G_3$ positivo, il prodotto $(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)\ldots(\delta-\tau)G_4$ negativo, e così di seguito. Mentre dunque nel primo membro della equazione (Φ') si sostituiscono in luogo di x tutte le radici reali α, β, γ, δ, . . . della equazione (Φ), esso diviene alternativamente positivo e negativo, e perciò (182) tutte le radici reali della equazione (Φ) sono limiti delle radici reali della equazione (Φ').

192. Adunque se le radici della equazione (Φ) sono tutte reali, tutte le radici della (Φ') saranno altresì reali (182). Che se poi la equazione (Φ) contenga radici immaginarie, il numero di queste non potrà mai essere minore del numero delle radici immaginarie della (Φ'); poichè se il numero delle radici immaginarie della equazione (Φ) venisse alcuna volta superato dal numero delle radici immaginarie della (Φ'), la differenza tra l' un numero e l'altro non potrebbe segnare un numero dispari, altrimenti una delle due equazioni (Φ), (Φ') conterrebbe un numero dispari di radici immaginarie, ciò che si è dimostrato impossibile (188); asserendo quindi che le radici immaginarie della (Φ') possano alcuna volta superare le radici immaginarie della (Φ), si dovrà insieme supporre che la differenza tra quelle radici e queste segni un numero pari. Or supponendo per poco che la (Φ') contenga un numero pari di radici immaginarie di più, si dovrà conseguentemente supporre il grado della (Φ') superiore al grado della (Φ), perchè dovendo tra ogni due radici reali di questa medesima (Φ) contenersi una delle radici reali della (Φ') (191), il numero delle radici reali della (Φ) potrà al più superare di una unità il numero delle radici reali della (Φ'), nel qual caso se il numero delle radici immaginarie della (Φ') superasse anche di due sole unità, il numero delle radici immaginarie della (Φ), sarebbe il numero di tutte le radici della (Φ') superiore di una unità al numero di tutte le radici della (Φ), e perciò il grado di quella verrebbe a superare di una unità il grado di questa. Con più forte ragione si conchinderà il grado della (Φ') dover superare il grado della (Φ), ove il numero delle radici reali di questa aggnagli il numero delle radici reali di quella o ne sia minore. Ma ha luogo il contrario, perchè per ipotesi il grado della (Φ) essendo m, quello della (Φ') è (191) $m-1$. Adunque se la (Φ) ha radici immaginarie, la (Φ') ne conterrà o altrettante, o un numero minore.

193. Può dunque la proposta (Φ) avere assai più radici immaginarie che non ne ha la equazione (Φ'). Per ben comprendere ciò, sieno α', β', γ', δ', ... le radici reali di questa equazione disposte per ordine di grandezza; io dico che la proposta non potrà avere che una sola radice maggiore di α', ed una sola compresa in ciascun intervallo tra α' e β', o tra β' e γ', o tra γ' e δ', ec. ... Infatti se la proposta avesse due radici reali maggiori di α', siccome tra queste due caderebbe una radice reale della equazione (Φ') (191), α' non sarebbe la massima tra le radici di questa. Così pure se tra α' e β' cadessero due radici reali della proposta, poichè tra queste due sarebbe compresa una radice reale della equazione (Φ'), α' e β', contro la ipotesi, non si succederebbero in ordine di grandezza, e così in seguito. Ciò posto, se (191) chiamiamo (Φ_1), (Φ_2), (Φ_3), (Φ_4), ec. ... F_1, F_2, F_3, F_4, ec. ... i valori di (Φ) e di F quando in luogo di x vi si sostituisce successivamente α', β', γ', δ', ec. ... avremo

$$(\Phi_1)=(\alpha'-\alpha)(\alpha'-\beta)(\alpha'-\gamma)(\alpha'-\delta)\ \ldots\ (\alpha'-\tau)F_1\,,$$
$$(\Phi_2)=(\beta'-\alpha)(\beta'-\beta)(\beta'-\gamma)(\beta'-\delta)\ \ldots\ (\beta'-\tau)F_2\,,$$
$$(\Phi_3)=(\gamma'-\alpha)(\gamma'-\beta)(\gamma'-\gamma)(\gamma'-\delta)\ \ldots\ (\gamma'-\tau)F_3\,,$$
$$(\Phi_4)=(\delta'-\alpha)(\delta'-\beta)(\delta'-\gamma)(\delta'-\delta)\ \ldots\ (\delta'-\tau)F_4\,,$$
ec. ec. . . . .

Ora è facile il vedere che se la proposta ha una sola radice maggiore di α', la quantità (Φ_1) sarà negativa; all' opposto sarà positiva, se niuna radice della

proposta è maggiore di α'. Se tra α' e β' cadrà una sola delle radici α, β, γ, δ, . . . , τ, le quantità (Φ_1) e (Φ_2) avranno segno diverso, e quindi se hanno il medesimo segno, niuna radice reale della proposta è compresa tra α' e β'. Nella medesima guisa le due quantità (Φ_2), (Φ_3) avranno il segno diverso se una radice della proposta cadrà tra β' e γ', e così appresso.

Se la proposta ha il medesimo numero di radici immaginarie che la equazione (Φ'), dovrà necessariamente avere una radice reale maggiore di α', una compresa tra α' e β', un'altra tra β' e γ', e così di seguito. Quindi la quantità (Φ) diventerà in tal caso alternativamente negativa e positiva, allorchè vi si sostituiranno per ordine le radici α', β', γ', δ', . . . Che se alcuna di queste condizioni mancherà, ciò sarà un indizio sicuro, che la proposta ha più radici immaginarie che non ne ha la equazione (Φ').

194. Si potrà ora intendere agevolmente il seguente teorema: *se una qualunque data equazione* (Φ), *il cui grado sia* m, *si moltiplichi termine per termine per la serie* m, m—1, m—2, m—3, ... , 2, 1, 0, *e la equazione che ne risulta si moltiplichi di nuovo termine per termine per la serie* m—1, m—2, m—3, m—4, ... , 2, 1, 0, *e quella che ne nasce nella medesima guisa si moltiplichi per la serie* m—2, m—3, m—4, m—5,..., 2, 1, 0, *e così di seguito; tutte le equazioni nate da siffatte moltiplicazioni non avranno alcuna radice immaginaria se tutte le radici della proposta sono reali.*

La proposizione inversa non è però ugualmente vera, potendo benissimo avvenire che la proposta contenga assai più radici immaginarie che non ne ha quella che deriva dalla proposta moltiplicando rispettivamente i suoi termini per i termini della serie m, $m-1$, $m-2$, $m-3$, . . . , 2, 1, 0 (192.193).

195. *In ogni equazione il numero delle radici reali positive non può essere maggiore del numero delle variazioni di segno, nè il numero delle radici reali negative può essere maggiore del numero delle successioni di segno.* Chiamiamo *variazione di segno* il passaggio dal segno $+$ al segno $-$, ovvero dal segno $-$ al segno $+$ in due termini consecutivi, e per *successione di segno* intendiamo la costanza del medesimo segno nel termine seguente. Così ad esempio nella equazione

$$x^5-4x^4-6x^3+12x^2+7x-40=0$$

tre sono le variazioni di segno dal primo al secondo termine, dal terzo al quarto, e dal quinto al sesto, e due le successioni dal secondo termine al terzo, e dal quarto al quinto.

La proposizione che abbiamo enunciata ha due parti: la prima parte si dimostra come segue. Si abbia la equazione

$$x^m+\ldots-Ax^n-\ldots+Bx^p+\ldots--\ldots++\ldots\pm Kx^t\pm\ldots=0,$$

la quale, per maggior generalità, si supponga avere il primo suo membro composto di una prima serie $+x^m+\ldots$ di termini tutti positivi, poi di un'altra $-Ax^n-\ldots$ di termini tutti negativi, quindi di una terza $+Bx^p+\ldots$ di termini tutti positivi, e così appresso fino ad una ultima serie $\pm Kx^t\pm\ldots$, i cui termini saranno evidentemente o tutti positivi o tutti negativi secondo che il total numero di siffatte serie è dispari ovvero è pari.

Ciò presupposto moltiplicando il primo membro della equazione pel fattore $x-\alpha$ corrispondente ad una radice reale positiva, otterremo due prodotti parziali, dei quali il primo avrà i suoi termini affetti da quei segni medesimi dai quali sono affetti i termini del moltiplicando, ma i segni dei termini del secondo prodotto parziale saranno del tutto contrarii a quelli del moltiplicando medesimo e avanzati di un posto verso la destra. Adunque facendo soltanto conto di quei segni necessarii a considerarsi, i due prodotti parziali ed il prodotto totale potranno notarsi nella seguente foggia:

$$x^m \; + \ldots - Ax^n \; - \ldots + Bx^p \; + \ldots - - \ldots + + \ldots \pm Kx^t \; \pm \ldots$$
$$x-\alpha$$

$$x^{m+1} + \ldots - Ax^{n+1} - \ldots + Bx^{p+1} + \ldots - \ldots + \ldots \pm Kx^{t+1} \pm \ldots$$
$$\quad - \ldots - \ldots + \ldots + \ldots - \ldots - \ldots + \ldots \pm \ldots \mp \ldots \mp$$

$$+ \ldots \ldots - \ldots \ldots + \ldots \ldots - \ldots + \ldots \pm \ldots \ldots \mp$$

Rilevasi dalla semplice ispezione di questo prodotto totale che il suo primo termine è positivo come quello del moltiplicando, che il primo termine negativo $-Ax^n$ di questo moltiplicando corrisponde a un termine negativo del prodotto totale, checchè ne sia dei segni intermedii, come ancora che al termine positivo $+Bx^p$ del moltiplicando corrisponde un termine positivo del prodotto totale, e così di seguito fino al termine $\pm Kx^t$ del moltiplicando, a cui corrisponde un termine del prodotto totale affetto ancora dal medesimo segno; donde deducesi che a ciascuna variazione di segno del moltiplicando corrisponde almeno una variazione di segno del prodotto totale. Ma l' ultimo termine di questo prodotto totale è affetto dal segno $\mp$, col quale di necessità si dà luogo per lo meno ad una variazione che non si trova nel moltiplicando. Dunque la moltiplicazione del primo membro di una qualunque equazione per un fattore $x-\alpha$ corrispondente ad una radice reale positiva introduce per lo meno una variazione di più nella medesima equazione. Dunque se ciascuna radice reale positiva introdotta in una equazione dà luogo ad una variazione di più, la equazione non potrà affatto contenere un numero di radici reali positive maggiore del numero delle variazioni di segno.

Riguardo alla seconda parte della proposizione basterà l' osservare che mutando in una equazione la x in $-x$, la qual cosa fa sì che le radici positive diventino negative, e vicendevolmente le negative diventino positive, le variazioni di segno si muteranno in successioni, e le successioni in variazioni. Ma da ciò che è dimostrato nella prima parte della proposizione, la trasformata non può avere un numero di radici reali positive maggiore del numero delle variazioni di segno. Dunque il numero delle radici reali negative della proposta non potrà essere maggiore del numero delle successioni di segno.

Il teorema già dimostrato si deve al celebre Descartes, ma la dimostrazione che ne abbiamo data è del chiarissimo Gauss. Questi però ha osservato che la prima parte della proposizione è sempre vera, qualunque sia la equazione, completa cioè o incompleta; ma che la seconda parte per essere esatta deve supporre o completa la equazione, ovvero, se essa è incompleta, che siensi per mezzo del coefficiente $\pm o$ suppliti i termini che mancano. Così nella equazione incompleta

$$x^4 - 5x^2 + 8x - 6 = 0$$

non avendo luogo che le sole variazioni di segno, potrebbe a primo aspetto sembrare che la medesima non potesse contenere radici reali negative; eppure essendo essa di grado pari ed avendo l'ultimo termine negativo dovrà per lo meno avere una radice reale negativa (184). Ma cesserà siffatta difficoltà ove la proposta scrivasi come segue

$$x^4 \pm 0 . x^3 - 5x^2 + 8x - 60 = 0.$$

Infatti si vede che in questa equazione ha luogo una successione di segno sia che si voglia il coefficiente o affetto dal segno $+$, sia che si voglia affetto dal segno $-$.

196. *Quantunque volte le radici di una equazione sono tutte reali, il numero delle radici positive sarà uguale al numero delle variazioni, ed il numero delle radici negative agguaglierà il numero delle successioni.*

Essendo m il grado della equazione, esprimasi per n il numero delle variazioni, e per p quello delle successioni, sarà $m=n+p$. D'altronde se n' segni il numero delle radici positive, e p' quello delle negative, si ha pure $m=n'+p'$ (165). Dunque

$$n+p=n'+p'.$$

Or (195) nè n' può essere $>n$, nè $p'>p$. Quindi sarà $n'=n$, e $p'=p$.

197. Questo teorema può alcuna volta farci venire in cognizione della esistenza delle radici immaginarie in una data equazione. Vediamolo nei seguenti esempii.

1.° Propongasi la equazione

$$x^3-2x^2-3x-7=0,$$

le radici della quale se fossero tutte reali, i segni indicherebbero una radice positiva e due negative. Moltiplicandola per $x-\alpha$, introducendo cioè in essa una seconda radice positiva, dovrebbe la equazione di quarto grado che quindi ne risulta, cioè

$$x^4-(2+\alpha)x^3+(2\alpha-3)x^2-(7-3\alpha)x+7\alpha=0$$

contenere quattro radici reali, due positive e due negative. Ma prendendo $\alpha=2$ perchè sia $2\alpha>3$, e $7>3\alpha$, si ha

$$x^4-4x^3+x^2-x+14=0,$$

ed in questa equazione non possono supporsi le quattro radici tutte reali cosicchè due sieno positive e due negative, come chiaramente ce lo dimostrano i segni, i quali, se pur la equazione avesse le radici tutte reali, ce le indicherebbero tutte positive. Adunque la proposta non può avere tutte le sue radici reali, ma una reale positiva, e le altre due immaginarie.

2.° Sia data in secondo luogo la equazione

$$x^4-x^3+6x^2-12x+50=0.$$

Questa se avesse le radici tutte reali, perciò che si può argomentare dai segni,

le avrebbe altresì tutte positive. Moltiplicandola per $x+\alpha$, la equazione di quinto grado

$$x^5+(\alpha-1)x^4+(6-\alpha)x^3+(6\alpha-12)x^2+(50-12\alpha)x+50\alpha=0,$$

dovrebbe conseguentemente alla supposizione già fatta, avere le sue cinque radici tutte reali, quattro positive ed una negativa. Ma facendo in essa $\alpha=3$ si ottiene

$$x^5+2x^4+3x^3+6x^2+14x+150=0,$$

i cui termini essendo tutti positivi, le radici dovrebbero essere tutte negative, ove pur si volessero supporre tutte reali, e conseguentemente non potrà la proposta contenere alcuna radice reale positiva, e perciò le avrà tutte immaginarie.

3.° Si abbia la equazione incompleta

$$x^3+px+q=0,$$

in cui i valori di p e q si suppongono positivi; supplendo in essa per mezzo del coefficiente ± 0 il termine che manca, otterremo

$$x^3\pm 0.x^2+px+q=0.$$

Il segno superiore non fa scorgere altro nella equazione che successioni, mentre l'inferiore dà due variazioni ed una successione, ciocchè dimostra ad evidenza la esistenza di due radici immaginarie nella proposta. Infatti se tutte le radici della medesima fossero reali, in virtù del segno superiore dovrebbero essere tutte negative, mentre pel segno inferiore due dovrebbero essere positive ed una negativa, lo che dice manifesta contradizione.

Non sempre però data una equazione potrà con tal mezzo dedursi la esistenza delle radici immaginarie. Infatti se si proponesse la equazione

$$x^3-px+q=0,$$

nella quale, come nella precedente, i valori di p e q sono positivi, supplendovi il termine $\pm 0.x^2$, la equazione

$$x^3\pm 0.x^2-px+q=0,$$

ci presenterebbe due variazioni ed una successione, sia che si consideri il segno superiore, sia che si abbia riguardo al segno inferiore; e quindi la proposta potrebbe avere le tre radici tutte reali, due positive ed una negativa, ovvero due radici immaginarie ed una reale negativa, essendo positivo l'ultimo suo termine (185).

CAPO X.

DELLA RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI DEL TERZO E QUARTO GRADO, I CUI COEFFICIENTI SONO REALI.

198. Dalle cose che finora abbiamo esposte intorno alle principali proprietà delle equazioni dipendono in gran parte i metodi che si praticano nel risolvere le equazioni numeriche dei gradi superiori al secondo; prima però d'indicare siffatti metodi non credo essere fuori di proposito assegnare in questo luogo le formole generali delle radici delle equazioni letterali del terzo e del quarto grado. E per cominciare dalle equazioni del terzo grado, propongasi primieramente la equazione *pura*

$$x^3-i=0 \;.\;.\;.\; (f).$$

Una delle tre radici di questa equazione è certamente $x=\sqrt[3]{i}$; togliendo quindi dalla proposta questa radice, dividendo cioè la proposta per $x-\sqrt[3]{i}$ (164), otterremo la equazione di secondo grado

$$x^2+x\sqrt[3]{i}+\sqrt[3]{i^2}=0,$$

dalla quale agevolmente si dedurranno i valori delle altre due radici; infatti questa equazione ci dà ($161.e^{VII}$) $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{i}$. Adunque le tre radici della equazione (f) sono

$$\left.x=\sqrt[3]{i},\; x=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{i},\; x=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{i}\right\}(f').$$

199. Passiamo ora alla ricerca delle formole generali delle radici della equazione di terzo grado, dalla quale sia stato tolto il secondo termine (176). Sia essa

$$x^3+3hx+2k=0 \;.\;.\;.\; (f'').$$

Facendo $x=u+v$, risulterà $x^3=u^3+3u^2v+3uv^2+v^3=u^3+3uv(u+v)+$ $+v^3=u^3+3uvx+v^3$, ossia

$$x^3-3uvx-(u^3+v^3)=0.$$

Questa equazione, della quale una radice è $u+v$, sarà affatto identica con la (f''), quantunque volte determineremo le quantità u e v talmente che soddisfacciano insieme alle due seguenti relazioni

$$\left.uv=-h,\; u^3+v^3=-2k\right\} \;.\;.\;.\; (f''');$$

la risoluzione adunque della equazione (f'') dipende da quella delle due (f'''). Or la prima delle (f''') dà $v=-\frac{h}{u}$, il qual valore muta la seconda in $u^3-\frac{h^3}{u^3}+2k=0$, ossia in $u^6+2ku^3-h^3=0$; mettendo quindi $u^3=w$, in guisa che si abbia $w^2+2kw-h^3=0$, donde $w=-k\pm\sqrt{k^2+h^3}$, si otterranno per u i sei valori che seguono (198.(f'))

$$u=\sqrt[3]{w}=\sqrt[3]{-k\pm\sqrt{k^2+h^3}},$$

$$u=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{w}=\sqrt[3]{-k\pm\sqrt{k^2+h^3}}\cdot\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},$$

$$u=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{w}=\sqrt[3]{-k\pm\sqrt{k^2+h^3}}\cdot\frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

e per v gli altri sei corrispondenti

$$v=\frac{-h}{\sqrt[3]{-k\pm\sqrt{k^2+h^3}}}=\sqrt[3]{-k\mp\sqrt{k^2+h^3}},$$

$$v=\sqrt[3]{-k\mp\sqrt{k^2+h^3}}\cdot\frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

$$v=\sqrt[3]{-k\mp\sqrt{k^2+h^3}}\cdot\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.$$

Ma $x=u+v$; avremo dunque

$$x=\sqrt[3]{-k\pm\sqrt{k^2+h^3}}+\sqrt[3]{-k\mp\sqrt{k^2+h^3}},$$

$$x=\sqrt[3]{-k\pm\sqrt{k^2+h^3}}.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}+\sqrt[3]{-k\mp\sqrt{k^2+h^3}}.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

$$x=\sqrt[3]{-k\pm\sqrt{k^2+h^3}}.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}+\sqrt[3]{-k\mp\sqrt{k^2+h^3}}.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},$$

Questi sei valori di x, poichè ciascuno è doppio, riduconsi ai tre seguenti

$$\left.\begin{aligned}
x&=\sqrt[3]{-k+\sqrt{k^2+h^3}}+\sqrt[3]{-k-\sqrt{k^2+h^3}}\\
x&=\sqrt[3]{-k+\sqrt{k^2+h^3}}\cdot\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}+\sqrt[3]{-k-\sqrt{k^2+h^3}}\cdot\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\\
x&=\sqrt[3]{-k+\sqrt{k^2+h^3}}\cdot\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}+\sqrt[3]{-k-\sqrt{k^2+h^3}}\cdot\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}
\end{aligned}\right\}(f^{IV}),$$

i quali esprimono le tre radici della proposta equazione (f''). La prima radice, cioè

$$x=\sqrt[3]{-k+\sqrt{k^2+h^3}}+\sqrt[3]{-k-\sqrt{k^2+h^3}},$$

si chiama la *formola cardanica* da Cardano che si distinse molto nel trattarla.

200. Le formole (f^{IV}) danno luogo ai seguenti teoremi.

1.° *Le radici di una qualunque equazione di terzo grado della forma* (f'') *sono una reale e due immaginarie, quando il coefficiente del secondo termine è positivo, e quando, essendo negativo, il cubo della sua terza parte è minore del quadrato della metà del termine noto.* Imperocchè in siffatta ipotesi le due quantità

$$\sqrt[3]{-k+\sqrt{k^2+h^3}},\ \sqrt[3]{-k-\sqrt{k^2+h^3}}$$

sono reali; chiamando quindi m la prima ed n la seconda, la prima radice, cioè

$$x=m+n,$$

sarà reale, e le altre due radici, cioè

$$x=m\,\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}+n\,\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=-\frac{m+n}{2}+\frac{m-n}{2}\sqrt{-3},$$

$$x=m\,\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}+n\,\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=-\frac{m+n}{2}-\frac{m-n}{2}\sqrt{-3},$$

saranno essenzialmente immaginarie. Riguardo poi al segno della radice reale esso sarà positivo o negativo, secondo che il termine noto è negativo o positivo, lo che va di accordo con quanto fu dimostrato sopra (183, 185).

2.° *Le radici di una equazione di terzo grado della forma* (f'') *sono tutte reali, quante volte il coefficiente del secondo termine è negativo, ed il cubo della terza parte del suo valore assoluto pareggia il quadrato della metà del termine noto.* Rendesi ciò manifesto dalla semplice ispezione delle formole (f^{IV}) allorchè in esse si sostituisce $-h^3$ a $+h^3$ ed insieme si prende $k^2=h^3$. Pertanto in tale supposizione se il termine noto è positivo, le radici sono una negativa e due positive uguali fra loro, ma se il termine noto è negativo, una radice è positiva e le altre due uguali fra loro sono negative.

3.° *Le radici della equazione* (f'') *sono tutte reali e disuguali quando il coefficiente del secondo termine è negativo, ed il cubo della sua terza parte è maggiore del quadrato della metà del termine noto.* Avendo scritta la equazione (f'') sotto la forma

$$x^3-3hx+2k=0\,,$$

che è quella che in quanto al segno del secondo termine conviene al caso supposto nella ennunciazione del teorema, pongasi $x=y\sqrt{h}$; ne risulterà

$$y^3-3y+\frac{2k}{\sqrt{h^3}}=0.$$

Ma essendo per ipotesi $k^2<h^3$, è pure $k<\sqrt{h^3}$. Adunque ponendo per ragione di brevità $\dfrac{k}{\sqrt{h^3}}=l$, sarà l una frazione propria, e la equazione precedente diventerà

$$y^3-3y+2l=0.$$

Ora se per y si sostituiscono successivamente i numeri -2, -1, 0, 1, 2, i segni dei risultamenti saranno $-$, $+$, $+$, $-$, $+$ quando l è positiva, e saranno $-$, $+$, $-$, $-$, $+$ quando l è negativa. Adunque sì nell'uno che nell'altro caso avendosi tre volte i risultati di segno contrario, la equazione in y avrà (182) le sue tre radici reali e disuguali, e lo stesso per conseguenza avrà luogo per la data equazione in x.

Sogliono alcuni autori dimostrare quest'ultimo teorema a un dipresso come segue. Nella supposizione che nelle formole (f^{IV}) $+h^3$ si muti in $-h^3$ e che si abbia $k^2<h^3$, facendo $k^2-h^3=-\mu^2$, e $-k=\nu^3$, otterremo

$$x=\sqrt[3]{\nu^3+\mu\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{\nu^3-\mu\sqrt{-1}}\,,$$

$$x=\sqrt[3]{\nu^3+\mu\sqrt{-1}}\,.\,\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}+\sqrt[3]{\nu^3-\mu\sqrt{-1}}\,.\,\frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

$$x=\sqrt[3]{\nu^3+\mu\sqrt{-1}}\,.\,\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}+\sqrt[3]{\nu^3-\mu\sqrt{-1}}\,.\,\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.$$

Ora essendo $\sqrt[3]{\nu^3+\mu\sqrt{-1}}=(\nu^3+\mu\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$, se nella formola di Newton (124. (f_n)), la quale, come a suo luogo il vedremo, vale eziandio quando l'esponente è una frazione, mettiamo $n=\frac{1}{3}$, $a=\nu^3$, $b=\mu\sqrt{-1}$, troveremo

$$\sqrt[3]{\nu^3+\mu\sqrt{-1}}=\nu+\frac{1\mu}{3\nu^2}\sqrt{-1}+\frac{1.2\mu^2}{3.6\nu^5}-\frac{1.2.5\mu^3}{3.6.9\nu^8}\sqrt{-1}-\ldots\ldots,$$

da cui, posto

$$p=\nu+\frac{1.2\mu^2}{3.6\nu^5}-\ldots,\ \text{e}\ q=\frac{1\mu}{3\nu^2}-\frac{1.2.5\mu^3}{3.6.9\nu^8}+\ldots\ldots,$$

risulterà

$$\sqrt[3]{\nu^3+\mu\sqrt{-1}}=p+q\sqrt{-1}.$$

Con un ragionamento del tutto analogo si dimostrerà (125.(f'_n))

$$\sqrt[3]{\nu^3-\mu\sqrt{-1}}=p-q\sqrt{-1}.$$

Sostituendo questi valori nelle formole notate sopra, esse si muteranno in

$$x=p+q\sqrt{-1}+p-q\sqrt{-1}=2p,$$

$$x=(p+q\sqrt{-1})\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}+(p-q\sqrt{-1})\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=-p-q\sqrt{3},$$

$$x=(p+q\sqrt{-1})\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}+(p-q\sqrt{-1})\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=-p+q\sqrt{3},$$

le quali espressioni sono tutte evidentemente reali e disuguali. Adunque le radici della equazione (f'') ec. ec.

Ma la dimostrazione che ho addotta in primo luogo, gentilmente comunicatami dal chiarissimo Professore Tucci, mi è sembrata doversi anteporre a questa ultima per essere quella indipendente affatto dal binomio di Newton. Il che ho riputato più esatto, sia perchè esso binomio verrà dimostrato più tardi pel caso dell'esponente fratto, sia perchè la serie infinita in cui egli si svolge in tal caso, potrebbe essere *divergente*, e la più parte dei geometri, come a suo luogo si vedrà, è al presente di accordo nel riconoscere la incertezza dei risultamenti, ai quali può condurre l'uso delle serie divergenti.

Notiamo da ultimo che questo caso in cui tutte le radici quantunque reali compariscono sotto una forma immaginaria, dicesi il *caso irreducibile*, perchè

a niuno è riuscito finora di esprimere siffatte radici algebricamente, in termini cioè finiti di numero, sotto una forma reale.

201. Applichiamo ora le formole (f^{IV}) ad alcuni esempii.

Propongasi in primo luogo a risolvere la equazione di terzo grado

$$x^3+x-2=0\,;$$

comparandola con la (f''), si ottengono $h=\frac{1}{3}$, $k=-1$, e quindi le formole

$$x=\sqrt[3]{1+\sqrt{\left\{1+\frac{1}{27}\right\}}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{\left\{1+\frac{1}{27}\right\}}},$$

$$x=\sqrt[3]{1+\sqrt{\left\{1+\frac{1}{27}\right\}}}\cdot\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}+\sqrt[3]{1-\sqrt{\left\{1+\frac{1}{27}\right\}}}\cdot\frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

$$x=\sqrt[3]{1+\sqrt{\left\{1+\frac{1}{27}\right\}}}\cdot\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}+\sqrt[3]{1-\sqrt{\left\{1+\frac{1}{27}\right\}}}\cdot\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},$$

dinoteranno le espressioni delle sue tre radici. Or noi abbiamo

$$\sqrt[3]{1\pm\sqrt{\left\{1+\frac{1}{27}\right\}}}=\sqrt[3]{1\pm\sqrt{\left\{\frac{28}{27}\right\}}}=\sqrt[3]{1\pm\sqrt{\left\{\frac{3.28}{3.27}\right\}}}=$$

$$=\sqrt[3]{1\pm\sqrt{\left\{\frac{4.21}{81}\right\}}}=\sqrt[3]{1\pm\frac{2}{9}\sqrt{21}},$$

in seguito poi dimostreremo $\sqrt[3]{1\pm\frac{2}{9}\sqrt{21}}=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{6}\sqrt{21}$. Adunque le tre radici della equazione proposta saranno

$$x=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{21}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{21}=1,$$

$$x=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{21}\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-3}}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{21}\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{-3}}{2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{-3.21}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-7},$$

$$x=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{21}\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{-3}}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{21}\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-3}}{2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{-3.21}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-7}.$$

Si abbia in secondo luogo la equazione

$$x^3-7x+6=0.$$

Paragonandola con la (f''), troveremo $h=-\frac{7}{3}$, $k=3$, e perciò le espressioni delle sue tre radici saranno

$$x=\sqrt[3]{-3+\sqrt{\left\{9-\frac{343}{27}\right\}}}+\sqrt[3]{-3-\sqrt{\left\{9-\frac{343}{27}\right\}}},$$

$$x=\sqrt[3]{-3+\sqrt{\left\{9-\frac{343}{27}\right\}}}\cdot\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}+\sqrt[3]{-3-\sqrt{\left\{9-\frac{343}{27}\right\}}}\cdot\frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

$$x=\sqrt[3]{-3+\sqrt{\left\{9-\frac{343}{27}\right\}}}\cdot\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}+\sqrt[3]{-3-\sqrt{\left\{9-\frac{343}{27}\right\}}}\cdot\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.$$

Ma $\sqrt[3]{-3\pm\sqrt{\left\{9-\frac{343}{27}\right\}}}=\sqrt[3]{-3\pm\sqrt{\left\{-\frac{100}{27}\right\}}}=\sqrt[3]{-3\pm\sqrt{\left\{-\frac{3.100}{81}\right\}}}=$

$=\sqrt[3]{-3\pm\frac{10}{9}\sqrt{-3}}$, ed inoltre $\sqrt[3]{-3\pm\frac{10}{9}\sqrt{-3}}=1\pm\frac{2}{3}\sqrt{-3}$, come in seguito sarà dimostrato; adunque sostituendo, otterremo

$$x=1+\frac{2}{3}\sqrt{-3}+1-\frac{2}{3}\sqrt{-3}=2,$$

$$x=\left(1+\frac{2}{3}\sqrt{-3}\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-3}}{2}\right)+\left(1-\frac{2}{3}\sqrt{-3}\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{-3}}{2}\right)=-3,$$

$$x=\left(1+\frac{2}{3}\sqrt{-3}\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{-3}}{2}\right)+\left(1-\frac{2}{3}\sqrt{-3}\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-3}}{2}\right)=1.$$

In questo secondo esempio tutti e tre i valori di x quantunque reali, sono comparsi da principio involti fra quantità immaginarie; nondimeno hanno essi potuto essere algebricamente liberati da siffatte quantità immaginarie, perchè dal binomio $-3\pm\frac{10}{9}\sqrt{-3}$ ha potuto estrarsi perfettamente la radice cubica. In generale, quantunque volte la espressione $-k\pm\sqrt{k^2+h^3}$ è un cubo perfetto, non si darà mai luogo al caso irreducibile. Il metodo poi che si dovrà tenere a fine di scorgere se la espressione $-k\pm\sqrt{k^2+h^3}$ nei casi particolari sia o no un cubo perfetto, formerà il soggetto di speciali ricerche, delle quali si tratterà in appresso.

202. Vogliasi ora risolvere la equazione pura di quarto grado

$$x^4-i=0 \quad . \; . \; . \; (f_0).$$

Essendo $x^4=i$ ed $x^2=\pm\sqrt{i}$, ove si faccia $\sqrt{i}=a$, si otterrà $x^2=\pm a$, ed $x=\pm\sqrt{\pm a}$. Adunque i quattro valori di x saranno

$$x=\sqrt{a}\,,\; x=-\sqrt{a}\,,\; x=\sqrt{-a}\,,\; x=-\sqrt{-a}\,;$$

ma (113) $\sqrt{a}=\sqrt{\sqrt{i}}=\sqrt[4]{i}$; quindi sostituendo, saranno

$$\left.x=\sqrt[4]{i}\,,\; x=-\sqrt[4]{i}\,,\; x=\sqrt[4]{i}\,\sqrt{-1}\,,\; x=-\sqrt[4]{i}\,\sqrt{-1}\right\} \quad . \; . \; . \; (f_1)$$

le quattro radici della proposta (f_0).

203. Sia una equazione qualunque di quarto grado senza il secondo termine espressa per

$$x^4+hx^2+kx+l=0 \quad . \; . \; . \; (f_2)\,;$$

a risolver la quale pongasi $x=u+v+w$, sarà

$$x^2=u^2+v^2+w^2+2(uv+uw+vw),$$

ossia

$$x^2-(u^2+v^2+w^2)=2(uv+uw+vw).$$

Innalzando al quadrato questa ultima equazione, si ha

$$x^4-2(u^2+v^2+w^2)x^2+(u^2+v^2+w^2)^2=4(uv+uw+vw)^2=$$
$$=4(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2)+8uvw(u+v+w)=4(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2)+8uvwx\,,$$

e quindi

$$x^4-2(u^2+v^2+w^2)x^2-8uvwx+(u^2+v^2+w^2)^2-4(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2)=0.$$

Questa equazione, della quale una radice è $u+v+w$, sarà identica con la (f_2), ove si soddisfaccia alle tre seguenti relazioni

$$2(u^2+v^2+w^2)=-h\,,\; 8uvw=-k\,,$$
$$(u^2+v^2+w^2)^2-4(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2)=l\,,$$

cioè alle tre

$$\left.\begin{array}{l} u^2+v^2+w^2=-\dfrac{h}{2}\,,\; uvw=-\dfrac{k}{8}\,, \\ u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2=\dfrac{h^2}{16}-\dfrac{l}{4}\,. \end{array}\right\} (f_3)$$

Adunque la risoluzione della (f_2) dipende dalla risoluzione delle (f_3). Or u^2,

v^2, w^2 sono (166) radici della equazione

$$t^3-(u^2+v^2+w^2)t^2+(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2)t-u^2v^2w^2=0\,,$$

ovvero della

$$t^3+\frac{h}{2}t^2+\left(\frac{h^2}{16}-\frac{l}{4}\right)t-\frac{k^2}{64}=0\ \ldots\ (f_4).$$

Laonde se con t_1, t_2, t_3, si dinotino le tre radici della equazione (f_4); saranno

$$u^2=t_1\,,\ v^2=t_2\,,\ w^2=t_3\,,$$

e quindi

$$u=\pm\sqrt{t_1}\,,\ v=\pm\sqrt{t_2}\,,\ w=\pm\sqrt{t_3}\,.$$

Ma $x=u+v+w$; e però

$$x=\pm\sqrt{t_1}\pm\sqrt{t_2}\pm\sqrt{t_3}\,.$$

Sembra a prima vista che otto sieno i valori di x, ma pure dovendo le u, v, w esser tali da soddisfare alla seconda delle relazioni (f_3), chiaro si scorge doversi ai tre radicali $\sqrt{t_1}$, $\sqrt{t_2}$, $\sqrt{t_3}$ prefigere quei segni soltanto che possano far risultare negativo il loro prodotto quando k è positivo nella equazione (f_2), e positivo allorchè k è negativo. Or si sa che un prodotto di tre fattori è positivo quando o tutti questi fattori sono positivi, ovvero uno è positivo e due negativi, ed è negativo quando o tutti i fattori sono negativi, ovvero uno è negativo e due positivi. Quindi le radici della proposta saranno nella ipotesi di $k<0$

$$\left.\begin{aligned}
x&=\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}+\sqrt{t_3}\\
x&=\sqrt{t_1}-\sqrt{t_2}-\sqrt{t_3}\\
x&=-\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}-\sqrt{t_3}\\
x&=-\sqrt{t_1}-\sqrt{t_2}+\sqrt{t_3}
\end{aligned}\right\}(f_5),$$

e nel caso di $k>0$

$$\left.\begin{aligned}
x&=-\sqrt{t_1}-\sqrt{t_2}-\sqrt{t_3}\\
x&=-\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}+\sqrt{t_3}\\
x&=\sqrt{t_1}-\sqrt{t_2}+\sqrt{t_3}\\
x&=\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}-\sqrt{t_3}
\end{aligned}\right\}(f_6).$$

204. La equazione (f_4) dicesi *la ridotta* della (f_2), dipendendo la risoluzione di questa dalla risoluzione di quella. Noteremo pertanto i seguenti teoremi.

1.° *Le tre radici della ridotta sono sempre o tutte reali e positive, o tutte reali ma una positiva e due negative, o una reale positiva e due im-*

maginarie. Infatti essendo l'ultimo termine della ridotta negativo, dovrà essa necessariamente avere una radice reale positiva (183). Posto ciò, le sue altre due radici saranno entrambe reali, ovvero entrambe immaginarie; nella ipotesi però che sieno reali, dovranno essere eziandio o tutte due positive o tutte due negative, perchè altrimenti il prodotto delle tre radici non pareggerebbe l'ultimo termine preso col segno contrario (166). Adunque ec. ec.

2.° *Se le tre radici della ridotta sono tutte reali e positive, le radici della proposta saranno tutte necessariamente reali.* Perocchè supponendosi reali e positivi i valori di t_1, t_2, t_3, saranno reali i valori dei radicali $\sqrt{t_1}$, $\sqrt{t_2}$, $\sqrt{t_3}$, e conseguentemente ancora quelli di x nelle formole $(f5)$, $(f6)$.

3.° *Se tutte le radici della ridotta sono reali, ma una positiva e due negative, le radici della proposta saranno tutte immaginarie quante volte le due radici negative della ridotta sieno disuguali; che se le due radici negative della ridotta sono fra loro uguali, due delle radici della proposta saranno immaginarie e due altre reali ed uguali.* Ed invero allorchè le radici della ridotta sono per esempio t_1, $-t_2$, $-t_3$, e non si ha $t_2=t_3$, in ciascun valore di x nelle formole $(f5)$, $(f6)$ si contengono le quantità immaginarie $\sqrt{t_2}\sqrt{-1}$, $\sqrt{t_3}\sqrt{-1}$ le quali non si distruggono scambievolmente; ma avendosi $t_2=t_3$ i valori di x in $(f5)$ si ridurranno a

$$x=\sqrt{t_1}+2\sqrt{t_2}\sqrt{-1},$$
$$x=\sqrt{t_1}-2\sqrt{t_2}\sqrt{-1},$$
$$x=-\sqrt{t_1},$$
$$x=-\sqrt{t_1};$$

e quelli in $(f6)$ a

$$x=-\sqrt{t_1}-2\sqrt{t_2}\sqrt{-1},$$
$$x=-\sqrt{t_1}+2\sqrt{t_2}\sqrt{-1},$$
$$x=\sqrt{t_1},$$
$$x=\sqrt{t_1}.$$

Adunque se tutte le radici della ridotta ec. ec. (*).

4.° Finalmente *se una delle tre radici della ridotta essendo reale e po-*

(*) Allorchè delle tre radici reali della ridotta una è positiva, p. e. t_1, e le altre due t_2, t_3 sono negative, le formole $(f5)$ divengono

$$x=\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}\sqrt{-1}+\sqrt{t_3}\sqrt{-1}.$$

ec. . . . .

Ora è manifesto che le tre parti costituenti questa radice moltiplicate fra loro danno un prodotto negativo. Dunque per tal caso le formole $(f5)$ si dovranno usare quando $k>0$, e per contrario le formole $(f6)$ converranno al caso in cui $k<0$.

sitiva le altre due sono immaginarie, due delle radici della proposta risulteranno reali e le altre due immaginarie. Per dimostrarlo, mettiamo (190) $t_2=\alpha+\beta\sqrt{-1}$, e $t_3=\alpha-\beta\sqrt{-1}$; sarà

$$\sqrt{t_2}=\sqrt{\alpha+\beta\sqrt{-1}}=a+b\sqrt{-1},$$

$$\sqrt{t_3}=\sqrt{\alpha-\beta\sqrt{-1}}=a-b\sqrt{-1},$$

in cui (160. e^{iv})

$$a=\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}{2}}\ ,\ b=\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{2}}\ .$$

Sostituendo quindi nelle formole ($f5$) e ($f6$) siffatti valori immaginarii dei due radicali $\sqrt{t_2}, \sqrt{t_3}$, le prime daranno

$$x=\sqrt{t_1}+2a\ ,\ x=\sqrt{t_1}-2a\ ,$$

$$x=-\sqrt{t_1}+2b\sqrt{-1}\ ,\ x=-\sqrt{t_1}-2b\sqrt{-1}\ ,$$

e le seconde

$$x=-\sqrt{t_1}-2a\ ,\ x=-\sqrt{t_1}+2a\ ,$$

$$x=\sqrt{t_1}-2b\sqrt{-1}\ ,\ x=\sqrt{t_1}+2b\sqrt{-1}\ .$$

Adunque se una delle tre radici della ridotta ec. ec.

205. Soggiungo ora i seguenti esempii onde servano ai giovani di norma nelle risoluzioni di equazioni del quarto grado. Si abbia la equazione

$$x^4-12x^2-16\sqrt{3}\ x-16=0.$$

Paragonandola con la ($f2$), otterremo $h=-12$, $k=-16\sqrt{3}$, $l=-16$, e quindi $\frac{h}{2}=-6$, $\frac{h^2}{16}=\frac{144}{16}=9$, $\frac{l}{4}=-4$, $\frac{k^2}{64}=\frac{3.256}{64}=12$. Adunque la ridotta della equazione proposta sarà

$$t^3-6t^2+13t-12=0,$$

della quale le radici sono

$$t_1=3\ ,\ t_2=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}\sqrt{-1}\ ,\ t_3=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}\sqrt{-1}.$$

E poichè $k<0$, perciò le radici della proposta saranno

$$x=\sqrt{3}+\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}\sqrt{-1}}+\sqrt{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}\sqrt{-1}},$$

$$x= \sqrt{3} - \sqrt{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}\sqrt{-1}} - \sqrt{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}\sqrt{-1}},$$

$$x=-\sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}\sqrt{-1}} - \sqrt{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}\sqrt{-1}},$$

$$x=-\sqrt{3} - \sqrt{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}\sqrt{-1}} + \sqrt{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}\sqrt{-1}}.$$

Ma (204.4.°)

$$\sqrt{\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{7}}{2}\sqrt{-1}} = \sqrt{\left\{\frac{\sqrt{\left(\frac{9}{4}+\frac{7}{4}\right)}+\frac{3}{2}}{2}\right\}} \pm$$

$$\pm\sqrt{\left\{\frac{\sqrt{\left(\frac{9}{4}+\frac{7}{4}\right)}-\frac{3}{2}}{2}\right\}}\sqrt{-1} = \frac{\sqrt{7}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-1}.$$

Adunque sostituendo, le quattro radici della proposta si ridurranno alle seguenti

$$x=\sqrt{3}+\sqrt{7},\ x=\sqrt{3}-\sqrt{7},$$

$$x=-\sqrt{3}+\sqrt{-1},\ x=-\sqrt{3}-\sqrt{-1}.$$

Propongasi in secondo luogo a risolvere la equazione

$$x^4-2x^2+16x-15=0.$$

Abbiamo $h=-2$, $k=16$, $l=-15$, e quindi $\frac{h}{2}=-1$, $\frac{h^2}{16}=\frac{1}{4}$, $\frac{l}{4}=-\left(3+\frac{3}{4}\right)$, $\frac{k^2}{64}=4$. Sostituendo siffatti valori nella (f_4), esprimerà

$$t^3-t^2+4t-4=0$$

la ridotta della proposta. Or questa ridotta ha per radici

$$t_1=1,\ t_2=2\sqrt{-1},\ t_3=-2\sqrt{-1};$$

poichè dunque $k>0$, le radici della proposta saranno

$$x=-1-\sqrt{2\sqrt{-1}}-\sqrt{-2\sqrt{-1}},$$

$$x=-1+\sqrt{2\sqrt{-1}}+\sqrt{-2\sqrt{-1}},$$

$$x = 1 - \sqrt{2\sqrt{-1}} + \sqrt{-2\sqrt{-1}},$$

$$x = 1 + \sqrt{2\sqrt{-1}} - \sqrt{-2\sqrt{-1}}.$$

Ma (204.4.°)

$$\sqrt{\pm 2\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{\sqrt{4}}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{4}}{2}}\sqrt{-1} = 1 \pm \sqrt{-1}.$$

Quindi sostituendo, dinoteranno

$$x = -1 - (1 + \sqrt{-1}) - (1 - \sqrt{-1}) = -3,$$

$$x = -1 + (1 + \sqrt{-1}) + (1 - \sqrt{-1}) = 1,$$

$$x = 1 - (1 + \sqrt{-1}) + (1 - \sqrt{-1}) = 1 - 2\sqrt{-1},$$

$$x = 1 + (1 + \sqrt{-1}) - (1 - \sqrt{-1}) = 1 + 2\sqrt{-1},$$

i quattro valori delle quattro radici della proposta.

CAPO XI.

DEL MODO DI TROVARE LE RADICI RAZIONALI DELLE EQUAZIONI NUMERICHE.

206. Non vi ha risoluzione generale per le equazioni dei gradi superiori al quarto, che anzi a parlar propriamente non vi ha risoluzione generale, che riguardar si possa completa, che quella delle equazioni del primo e del secondo grado; infatti, come si è pur veduto, le espressioni delle radici delle equazioni del terzo grado e del quarto sono assai complicate, soggette ad eccezioni, e molto meno commode nella pratica. Ma quantunque sia vero che non possa ottenersi la risoluzione generale delle equazioni di un grado più elevato del quarto, ciò non ostante, ove una equazione qualunque abbia radici razionali, queste potranno sempre ed agevolmente trovarsi. Cominceremo pertanto ad inoltrarci in siffatte ricerche dal teorema seguente.

Una equazione qualunque, nella quale la unità è il coefficiente del primo termine, e tutti gli altri coefficienti sono numeri interi, non può contenere radici razionali che sieno espresse per numeri fratti.

Si abbia la equazione

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots + Sx + T = 0,$$

nella quale A, B, C, ... S, T sieno numeri interi; supponendo che essa

possa ammettere una radice razionale fratta della forma $\frac{a}{b}$, avremo sostituendola ad x

$$\frac{a^m}{b^m}+A\frac{a^{m-1}}{b^{m-1}}+B\frac{a^{m-2}}{b^{m-2}}+C\frac{a^{m-3}}{b^{m-3}}+\ldots+S\frac{a}{b}+T=0,$$

e quindi

$$\frac{a^m}{b^m}=\frac{-(Aa^{m-1}+Ba^{m-2}b+Ca^{m-3}b^2+\ldots+Sab^{m-2}+Tb^{m-1})}{b^{m-1}}.$$

Ora esprimendo a, b due numeri interi, il numeratore del secondo membro di questa ultima equazione sarà evidentemente anch'esso un numero intero, il quale se chiamiamo p, otterremo

$$\frac{a^m}{b^m}=\frac{p}{b^{m-1}},\ \text{cioè}\ \frac{a^m}{b}=p.$$

Ma ciò è impossibile nella supposizione che $\frac{a}{b}$ sia una frazione propria ridotta a minimi termini; poichè in tal caso essendo (46) a, b primi fra loro, saranno anche primi fra loro a^m, b, e perciò non potrà il quoziente $\frac{a^m}{b}$ essere uguale al numero intero p. Non può dunque una equazione che abbia tutti i suoi termini interi, ed il coefficiente del primo uguale alla unità, avere per radice una frazione razionale.

207. Una equazione qualunque può sempre trasformarsi in un'altra che abbia le radici uguali alle radici della proposta moltiplicate per una data quantità (172). Siffatta trasformazione è specialmente utile a liberare dalle frazioni una equazione, in modo però che il primo termine non acquisti un coefficiente diverso dalla unità. Propongasi infatti la seguente equazione

$$x^m+\frac{a}{a'}x^{m-1}+\frac{b}{b'}x^{m-2}+\frac{c}{c'}x^{m-3}+\ldots+\frac{s}{s'}x+\frac{t}{t'}=0;$$

mettendo in essa $x=\frac{y}{h}$, otterremo

$$y^m+\frac{ah}{a'}y^{m-1}+\frac{bh^2}{b'}y^{m-2}+\frac{ch^3}{c'}y^{m-3}+\ldots+\frac{sh^{m-1}}{s'}y+\frac{th^m}{t'}=0.$$

E poichè h è una quantità della quale si può disporre a piacere, se essa si faccia uguale al prodotto $a'b'c'\ldots s't'$ di tutti i diversi denominatori delle frazioni, risulterà, sostituendo, una equazione in cui tutti i coefficienti saranno numeri interi rimanendo uguale alla unità il coefficiente del primo termine.

Allorchè i denominatori a', b', c', ... s', t' hanno comuni divisori, basterà prendere h uguale al più piccolo numero che possa nel tempo stesso dividersi per tutti i denominatori.

208. Dal detto consegnita che, ove stabilito siasi un metodo che c' insegni a trovare le radici razionali intere di una equazione qualunque, la quale abbia numeri interi per coefficienti e la unità per coefficiente del primo termine, sarà agevole ottenere le radici razionali intere o fratte di qualsivoglia altra equazione a coefficienti razionali qualunque.

Riprendiamo pertanto la equazione

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots + Qx^3 + Rx^2 + Sx + T = 0,$$

in cui $A, B, C, \ldots Q, R, S, T$ esprimono numeri interi. Supponendo che α sia una radice razionale intera della equazione, avremo

$$\alpha^m + A\alpha^{m-1} + B\alpha^{m-2} + C\alpha^{m-3} + \ldots + Q\alpha^3 + R\alpha^2 + S\alpha + T = 0,$$

e quindi

$$\frac{T}{\alpha} = -\alpha^{m-1} - A\alpha^{m-2} - B\alpha^{m-3} - C\alpha^{m-4} - \ldots - Q\alpha^2 - R\alpha - S \ldots (1).$$

Ora il secondo membro di questa ultima equazione segna un numero intero; adunque anche il primo membro $\frac{T}{\alpha}$ esprimerà un numero intero, dovrà quindi α necessariamente trovarsi fra i divisori del numero intero T; si rileva da ciò che le radici intere della proposta equazione dovranno sempre cercarsi tra i divisori dell' ultimo suo termine. E però allorchè questo termine ha pochi divisori le radici razionali potranno ottenersi con molta agevolezza nel modo che vien indicato dalla seguente regola: *prendendo tanto positivamente che negativamente i divisori dell' ultimo termine della equazione, e sostituendoli nella medesima successivamente in luogo della incognita* x, *se trovasi che alcuno vi soddisfaccia, sarà esso una radice della equazione, e se nessuno si trova che vi soddisfaccia, potremo essere certi che la equazione data è priva affatto di radici razionali.*

Serva per esempio la equazione del terzo grado già risoluta sopra (201)

$$x^3 - 7x + 6 = 0.$$

I divisori dell' ultimo termine, presi tanto positivamente che negativamente, sono 1, 2, 3, 6, -1, -2, -3, -6, dei quali tre soddisfanno alla proposta, cioè 1, 2, -3, e sono perciò le sue radici.

Inoltre nella equazione

$$x^3 - 6x^2 + 27x - 38 = 0,$$

in luogo di x sostituendo successivamente i divisori del numero 38, i quali presi tanto positivamente che negativamente sono 1, 2, 19, 38, -1, -2, -19, -38, si vedrà che il solo 2 vi soddisfa. Dividendo quindi la equazione per $x-2$ si giugnerà ad avere

$$x^2 - 4x + 19 = 0,$$

le cui radici sono immaginarie, cioè $2 + \sqrt{-15}$, $2 - \sqrt{-15}$. Adunque le tre

radici della proposta saranno

$$2\,,\ 2+\sqrt{-15}\,,\ 2-\sqrt{-15}.$$

La succennata regola diventa impraticabile ogni volta che l'ultimo termine della eqoazione ha molti divisori. Pertanto la equazione (1), mettendo $\frac{T}{\alpha}+S=S'$, ci dà

$$\frac{S'}{\alpha}=-\alpha^{m-2}-A\alpha^{m-3}-B\alpha^{m-4}-C\alpha^{m-5}-\ldots-Q\alpha-R=0\ \ldots (2)\,;$$

questa, facendo $\frac{S'}{\alpha}+R=R'$, riducesi a

$$\frac{R'}{\alpha}=-\alpha^{m-3}-A\alpha^{m-4}-B\alpha^{m-5}-C\alpha^{m-6}-\ldots-Q=0\ \ldots\ldots (3)\,;$$

dippiù questa, ponendo $\frac{R'}{\alpha}+Q=Q'$, si muta in

$$\frac{Q'}{\alpha}=-\alpha^{m-4}-A\alpha^{m-5}-B\alpha^{m-6}-C\alpha^{m-7}-\ldots\ldots\ldots (4)\,;$$

continoando in tal guisa a trasportare nel primo membro tutti i termini del secondo, si giunguerà finalmente ad avere

$$\frac{B'}{\alpha}=-\alpha-A\ \ldots\ldots\ldots\ldots (m-1)\,,$$

dalla quale, facendo $\frac{B'}{\alpha}+A=A'$, si dedurrà $\frac{A'}{\alpha}=-1$.

I secondi membri delle eqoazioni (2), (3), (4), ..., $(m-1)$ sono totti numeri interi per la ragione medesima per la qoale il secondo membro della (1) è un numero intero; adunqoe perchè il numero intero α, positivo o negativo, sia radice della proposta equazione, non solo fa d'uopo che il qoozieute $\frac{T}{\alpha}$ sia intero, ma altresì che sieno interi i quozienti $\frac{S'}{\alpha}, \frac{R'}{\alpha}, \frac{Q'}{\alpha}, \ldots, \frac{B'}{\alpha}$, e che inoltre si abbia $\frac{A'}{\alpha}=-1$.

Dal detto consegnita che un divisore α dell' ultimo termine della equazione proposta, perchè sia radice della medesima eqnazione, faccia di mestieri 1.° che il quoziente della divisione dell'ultimo termine per il divisore α sia intero; 2.° che a questo quoziente aggiugnendo col proprio segno il coefficiente di x, la somma divisa per α renda un numero intero; 3.° che al quoziente di qoesta seconda divisione aggiugnendo col proprio segno il coefficiente di x^2, il quoziente che si ottiene dividendo ona tal somma per α sia intero; e così di seguito, fiuchè aggiugnendo col proprio segno il coefficiente di x^{m-1} al quoziente ottenuto precedentemente, la nuova somma divisa per α si trovi essere uguale a -1.

Posto ciò, ecco una seconda regola onde scorgere se alcuno dei divisori del-

l' ultimo termine di una equazione data è radice della medesima, la quale dovrà mettersi in pratica quantunque volte quei divisori sieno molti di numero.

Avendo scritti in una medesima linea orizzontale tanto col segno positivo che col segno negativo tutti i divisori dell' ultimo termine, si notino al di sotto di questi divisori i quozienti delle divisioni dell' ultimo termine per ciascuno di essi; in seguito ad ognuno degli ottenuti quozienti aggiugnendo col proprio segno il coefficiente di x, *si segnino le somme sotto i quozienti che loro corrispondono; dividendo poi queste somme per ciascuno dei divisori, i nuovi quozienti si scrivano sotto le corrispondenti somme; e così in appresso operando, ove si abbia l'avvertenza nel corso della operazione di rigettare i quozienti fratti e di non più badare ai divisori che danno siffatti quozienti, si giugnerà presto, mediante le cose dimostrate precedentemente, a scuoprire se la proposta equazione abbia radici razionali intere, e quali esse sieno.*

Allorchè le particolari equazioni che si propongono sono incomplete avvertasi di tener conto dei termini che mancano, riguardando ciascun di loro come avente un coefficiente $=0$.

209. Serva per primo esempio la equazione

$$x^4-9x^3+23x^2-20x+15=0.$$

Il quadro del calcolo che dovrà istituirsi a fine di scorgere le radici razionali della proposta è il seguente

+15,	+ 5,	+ 3,	+ 1,	− 1,	− 3,	− 5,	−15
+ 1,	+ 3,	+ 5,	+15,	−15,	− 5,	− 3,	− 1
−19,	−17,	−15,	− 5,	−35,	−25,	−23,	−21
		− 5,	− 5,	+35			
		+18,	+18,	+58			
		+ 6,	+18,	−58			
		− 3,	+ 9,	−67			
		− 1,	+ 9,	+67			

In questo quadro tutti i divisori dell' ultimo termine 15 sono disposti per ordine di grandezza tanto col segno + che col segno − in una medesima linea orizzontale, che è la prima. Nella seconda linea si contengono i quozienti delle divisioni del numero 15 per ciascuno dei suoi divisori. La terza linea è formata dalle somme che si hanno aggiugnendo il coefficiente −20 di x a ciascuno dei numeri scritti nella seconda. La quarta linea contiene i soli quozienti interi che si ottengono dal dividere ciascun numero della linea precedente pel divisore che gli corrisponde. Nella quinta linea sono notate le somme che risultano aggiugnendo il coefficiente 23 di x^2 a ciascuno dei quozienti notati nella precedente linea. La sesta linea contiene i quozienti delle divisioni di ciascuno dei numeri della precedente pel divisore corrispondente. Nella settima linea si comprendono le somme dei numeri della sesta e del coefficiente −9 di x^3. Nella ottava finalmente sono segnati i quozienti che si ottengono dividendo ciascun numero della settima linea pel corrispondente divisore.

Ora il divisore +3 è quello che ci conduce al risultato −1; adunque la proposta avrà una radice razionale, cioè +3.

Ella è cosa inntile applicare siffatta regola ai divisori $+1$ e -1; imperocchè potrà sempre agevolmente vedersi se essi soddisfacciano o no alla proposta equazione col sostitnirli immediatamente nella medesima in luogo della x.

Propongasi in secondo luogo di trovare le radici razionali della segnente eqnazione

$$x^4-x^3-13x^2+16x-48=0.$$

L'nltimo termine ha per divisori 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48; d'altronde i dne divisori $+1$ e -1 non soddisfanno alla proposta; dunqne le cercate radici si troveranno formando il quadro che segue

+48,	+24,	+16,	+12,	+ 8,	+6,	+ 4,	+ 3,	+ 2,	− 2,	− 3,	− 4,	− 6,	− 8,	−12,	−16,	−24,	−48
− 1,	− 2,	− 3,	− 4,	− 6,	−8,	−12,	−16,	−24,	+24,	+16,	+12,	+ 8,	+ 6,	+ 4,	+ 3,	+ 2,	+ 1
+15,	+14,	+13,	+12,	+10,	+8,	+ 4,	0,	− 8,	+40,	+32,	+28,	+24,	+22,	+20,	+19,	+18,	+17
			+ 1,			+ 1,	0,	− 4,	−20,		− 7,	− 4					
			−12,			−12,	−13,	−17,	−33,		−20,	−17					
			− 1,			− 3,					+ 5						
			− 2,			− 4,					+ 4						
						− 1,					− 1						

nel qnale i soli divisori $+4$ e -4 condncono al risultato -1, e perciò $+4$ e -4 saranno le sole radici razionali della proposta. Dividendo infatti

$$x^4-x^3-13x^2+16x-48=0$$

per $(x-4)(x+4)=x^2-16$, si ottiene

$$x^2-x+3=0,$$

da cui si ha

$$x=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-11}.$$

Adunqne le quattro radici della proposta equazione sono

$$+4,\ -4,\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-11},\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-11}.$$

210. Nelle particolari applicazioni del metodo esposto nei numeri precedenti possono alcnna volta commettersi degli errori di addizione o di divisione, ciocchè potrebbe facilmente farci perdere di vista qualche radice; laonde non potrà mai sembrare inconveniente cosa, o almeno inutile che dopo di aver diviso la proposta equazione per ciascnno dei fattori di primo grado corrispondenti alle già ottenute radici, si applichi di nnovo il metodo alla risultante eqnazione, la quale è sempre di nn grado meno elevato, e parlando generalmente ha i coefficienti più semplici di quelli che si contengono nella proposta.

Che anzi vi hanno dei casi nei quali la equazione risultante dalla divisione

della proposta per ciascuno dei fattori di primo grado corrispondenti alle radici trovate, può benissimo contenere altre radici razionali senza che siasi commesso veruno errore. Infatti ciò avverrà sempre che la proposta abbia radici uguali, perchè il metodo esposto essendo solamente sufficiente per ottenere le radici disuguali, non saprà mai indicarci se una stessa radice si contenga una, ovvero più volte nella proposta. Si rileva da ciò che è detto, essere non solamente conveniente ed utile, ma bensì spesse volte necessario che si applichi di nuovo il metodo alla equazione che risulta dal sopprimere nella proposta le radici già ottenute.

Sia per esempio la equazione

$$x^5-13x^4+67x^3-171x^2+216x-108=0.$$

Operando come negli esempii esposti nel numero precedente, si vedrà chiaro che $+3$ e $+2$ sono due radici razionali della proposta; dividendola quindi per $(x-3)(x-2)=x^2-5x+6$, risulterà la seguente equazione

$$x^3-8x^2+21x-18=0,$$

la quale sottomessa alle medesime regole, con cui si sono ottenute le due succennate radici della proposta, si troverà altresì avere $+3$ e $+2$ per radici; dividendo ancora questa ultima equazione per $(x-3)(x-2)=x^2-5x+6$, si otterrà

$$x-3=0,$$

donde ricavasi $x=3$. Saranno dunque

$$+2, +2, +3, +3, +3$$

le cinque radici della proposta, la quale perciò potrà rappresentarsi per

$$(x-2)^2(x-3)^3=0.$$

211. Havvi una regola la quale, allorchè l' ultimo termine di una data equazione ha molti divisori insegna a rigettare gl' inutili ed a ritenere quelli solamente che possono soddisfare alla proposta. Si abbia infatti la equazione

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+\ldots+T=0,$$

i cui coefficienti esprimano altrettanti numeri interi. Dinotando α una radice razionale della medesima, il suo primo membro sarà divisibile esattamente per $x-\alpha$; si avrà quindi la equazione identica

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+\ldots+T=$$
$$=(x-\alpha)(x^{m-1}+A'x^{m-2}+B'x^{m-3}+\ldots+T'),$$

nella quale A', B', ..., T' sono numeri interi. Ora dovendo questa equazione aver luogo qualunque sia x, se in essa mettiamo successivamente $x=1$,

$=0$, $=-1$, otterremo le seguenti altre

$$U=-(\alpha-1)U',\ T=-\alpha T',\ V=-(\alpha+1)V':$$

esprimendo cioè con U, U' i risultamenti che si ottengono sostituendo 1 in luogo di x nelle due espressioni

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+\ .\ .\ .\ +T$$
$$x^{m-1}+A'x^{m-2}+B'x^{m-3}+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ +T',$$

e con V, V' quelli che si hanno mettendo in queste medesime espressioni $x=-1$. Ciò posto, abbiamo

$$\frac{U}{\alpha-1}=-U',\ \frac{T}{\alpha}=-T',\ \frac{V}{\alpha+1}=-V';$$

i secondi membri di queste tre equazioni sono numeri interi; dunque ancora i primi dovranno essere numeri interi. Di qui risulta la succennata regola: *posto nel primo membro della data equazione successivamente* $x=1$, $=0$, $=-1$, *ne vengano i numeri* U, T, V, *e sia* α *un divisore del numero* T; *perchè questo divisore possa essere una radice della proposta, fa d' uopo che tra i divisori di* U *si trovi* $\alpha-1$, *ed* $\alpha+1$ *tra i divisori di* V; *ove queste condizioni non abbiano luogo, il divisore* α *dovrà come inutile rigettarsi.* Veniamo agli esempii.

1.° Sia proposta in primo luogo la equazione

$$x^4-14x^3+71x^2-154x+120=0.$$

Facendo $x=1$, $=0$, $=-1$, avremo $U=24$, $T=120$, $V=360$; i divisori poi di 24 sono

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24,$$

quei di 120 sono

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 15,\ 20,\ 24,\ 30,\ 40,\ 60,\ 120,$$

e i divisori di 360 sono

$$1,2,3,4,5,6,8,9,10,12,15,18,20,24,30,36,40,45,60,72,90,120,180,360.$$

Posto ciò, tra i divisori di 120 rigetto 1, perchè tra quelli di 24 non vi è 0; ritengo il 2, perchè tra i divisori di 24 vi è 1, e 3 tra quelli di 360; così pure ritengo i divisori 3, 4, 5, perchè tra i divisori di 24 vi sono 2, 3, 4, e tra quelli di 360 vi sono 4, 5, 6, e rigetto tutti gli altri. Considerando poi i divisori negativamente, e rigettando -1, ammetto -2, e -3, perchè tra i divisori di 24 si trova -3, e -4, e tra quelli di 360 s'incontra -1, e -2. Rigetto -4, perchè -5 non si trova tra i divisori di 24; e nel modo medesimo ammettendo -5, rigetto tutti gli altri. I divisori dunque da ritenersi sono

$$2,\ 3,\ 4,\ 5,\ -2,\ -3,\ -5.$$

Applicando a questi divisori le regole del numero 208, si vedrà che i negativi non soddisfanno alla proposta, e che i positivi tutti vi soddisfanno, e però le quattro radici della proposta saranno 2, 3, 4, 5.

2.° Si prenda la equazione

$$x^3-3x+14=0,$$

Sarà $U=12$, $T=14$, $V=16$, dei quali numeri i divisori sono

$$\begin{array}{l} 12 \\ 14 \\ 16 \end{array}\left\{\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12. \\ 1,\ 2,\ 7,\ 14. \\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16. \end{array}\right.$$

Due soli divisori del 14, cioè 7 e -2 godono delle necessarie condizioni; sostituiti però nella equazione non vi soddisfanno, ond' essa non ha radice alcuna che sia razionale.

CAPO XII.

DEL MODO DI TROVARE I DIVISORI RAZIONALI DEL SECONDO GRADO DELLE EQUAZIONI, E DEL MODO DI ESTRARRE UNA RADICE QUALUNQUE DAL BINOMIO $a+\sqrt{b}$.

212. Il metodo finora esposto a fine di poter conoscere le radici razionali delle equazioni, vien detto altresì *metodo dei divisori razionali del primo grado*, in questo senso cioè, che conoscendo una radice razionale α intera o fratta di una data equazione, il primo suo membro può dividersi pel fattore di primo grado $x-\alpha$.

Allorchè una equazione numerica è stata liberata da tutti i divisori razionali di primo grado, la risultante equazione non contiene che radici reali irrazionali, ovvero radici immaginarie; ma però si comprende agevolmente che i fattori di primo grado corrispondenti a siffatte radici possono benissimo col combinarsi a due a due produrre fattori razionali del secondo grado. Infatti noi abbiamo

$$(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=x^2-3,$$

$$(x-1+\sqrt{-5})(x-1-\sqrt{-5})=x^2-2x+6,$$

ed in generale (190)

$$(x-u-v\sqrt{-1})(x-u+v\sqrt{-1})=(x-u)^2+v^2.$$

Dal detto conseguita che, sapendo noi in una data equazione trovare i fattori razionali del secondo grado, mettendoli uguali a zero, potremo sempre dedurne delle radici della equazione proposta.

Sia pertanto $X=0$ una equazione liberata già dai suoi divisori razionali del primo grado; ed inoltre con x^2+px+q rappresentisi uno qualunque dei divisori razionali del secondo grado di X. Si divida X per x^2+px+q, si giugnerà ad un residuo della forma $Mx+N$, il quale dovrà essere $=0$ indipendentemente dal valore di x, perchè la divisione si faccia esattamente. Avremo perciò le due equazioni

$$M=0\text{, ed } N=0$$

date per p, e q, e se da esse si eliminerà q, otterrassi una equazione in p. Cerchinsi le radici razionali di questa equazione, e se prese per p ci daranno un valore razionale anche per q, ne risulteranno altrettanti fattori razionali della proposta.

Sia data per esempio la equazione

$$x^4-3x^2+10x-6=0.$$

Si divida il primo membro per x^2+px+q, si giugnerà al residuo

$$(10+2pq-p^3+3p)x+q^2-p^2q+3q-6.$$

Questo residuo, quante volte il trinomio x^2+px+q suppongasi essere un esatto divisore del primo membro della proposta, dovrà mettersi $=0$, indipendentemente però da qualunque valore particolare di x; avremo quindi separatamente

$$p^3-2pq-3p-10=0\text{, } q^2-p^2q+3q-6=0\text{,}$$

dalle quali equazioni eliminando q, si otterrà (151)

$$p^6-6p^4+33p^2-100=0.$$

Ora le radici razionali di questa equazione sono 2 e -2, i quali valori sostituiti successivamente nella equazione

$$p^3-2pq-3p-10=0$$

in luogo di p, ci danno $q=-2$, e $q=3$. Dunque la proposta equazione ha i due divisori razionali

$$x^2+2x-2\text{, } x^2-2x+3\text{,}$$

i quali messi uguali a zero, ci daranno

$$-1+\sqrt{3},\ -1-\sqrt{3},\ 1+\sqrt{-2}\text{, } 1-\sqrt{-2}$$

per le quattro radici della medesima equazione.

Da questo solo esempio potrà facilmente argomentarsi essere siffatto metodo, facile in teoria, complicato assai nella pratica.

213. Prima di passar oltre alla ricerca delle radici irrazionali delle equazioni numeriche ci conviene in questo luogo soddisfare a quanto fu promesso nel numero 201.

Propongasi il binomio

$$a+\sqrt{b},$$

dal quale si voglia estrarre la radice m^{sima}. Sia primieramente m un numero dispari, la cercata radice, allorchè è possibile, sarà della forma

$$(x+\sqrt{y})\sqrt[m]{k};$$

infatti qualunque altra forma si assuma, innalzata alla potenza m^{sima} conterrà più di un radicale, e perciò non potrà essere uguale ad $a+\sqrt{b}$. Ponendo dunque

$$\sqrt[m]{a+\sqrt{b}}=(x+\sqrt{y})\sqrt[m]{k},$$

avremo

$$a+\sqrt{b}=(x+\sqrt{y})^m k,$$

donde, sviluppando in serie $(x+\sqrt{y})^m$, risulterà

$$a+\sqrt{b}=k(x^m+\frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}y+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}x^{m-4}y^2+\ldots)+$$

$$+k\sqrt{y}(mx^{m-1}+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^{m-3}y+\ldots\ldots\ldots).$$

Debbono pertanto essere uguali fra loro separatamente le quantità razionali e le irrazionali; adunque avremo

$$a=k(x^m+\frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}y+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}x^{m-4}y^2+\ldots)\ldots(\zeta).$$

$$\sqrt{b}=k\sqrt{y}(mx^{m-1}+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^{m-3}y+\ldots\ldots)\ldots\ldots(\zeta').$$

Quindi apparisce dover essere ancora

$$\sqrt[m]{a-\sqrt{b}}=(x-\sqrt{y})\sqrt[m]{k}.$$

Imperocchè elevando questa equazione alla potenza m^{sima} ricavansi le medesime formole (ζ), (ζ'). Posto ciò, sarà

$$\sqrt[m]{a+\sqrt{b}}\times\sqrt[m]{a-\sqrt{b}}=(x+\sqrt{y})(x-\sqrt{y})\sqrt[m]{k^2},$$

ovvero

$$\sqrt[m]{a^2-b}=(x^2-y)\sqrt[m]{k^2},$$

da cui si ha $\sqrt[m]{\frac{a^2-b}{k^2}}=x^2-y$; onde acciò la quantità x^2-y sia razionale, perchè cioè il binomio $a+\sqrt{b}$ abbia una radice della forma $(x+\sqrt{y})\sqrt[m]{k}$, fa d' uopo che $\frac{a^2-b}{k^2}$ sia una potenza m^{sima}. Determinando dunque k^2 in modo che soddisfaccia a questa condizione (ciocchè è sempre possibile, perchè ove altro valore non si trovasse, potrebbe prendersi $k^2=(a^2-b)^{m+1}$, ovvero $k^2=(a^2-b)^{-m+1}$), e quindi ponendo $\frac{a^2-b}{k^2}=c^m$; sarà $c=x^2-y$, e perciò $y=x^2-c$. Questo valore sostituito nella equazione (ζ), ci darà

$$a=k\left(x^m+\frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}(x^2-c)+\right.$$
$$\left.+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}x^{m-4}(x^2-c)^2+\ldots\right)\ldots(\zeta'').$$

Le radici razionali di questa equazione, se pur ne ha, ci daranno il valore di x, dal quale si dedurrà il corrispondente di y mediante la equazione $y=x^2-c$, e quindi la cercata radice $(x\pm\sqrt{y})\sqrt[m]{k}$. Innalzando questa radice alla potenza m^{sima}, e paragonandola con la proposta $a+\sqrt{b}$, si vedrà quale dei due segni $+$ o $-$ si debba prendere. Siffatta avvertenza è necessaria; poichè le formole generali nelle applicazioni ai casi particolari danno il segno dei valori di x e di y, ma però lasciano incerto il segno del radicale $\sqrt{y}$.

Vogliasi per esempio estrarre la radice cubica dal binomio $1+\frac{2}{9}\sqrt{21}$. Comparandolo con $a+\sqrt{b}$, avremo $a=1$, $\sqrt{b}=\frac{2}{9}\sqrt{21}$, e $b=\frac{84}{81}=\frac{28}{27}$, donde $a^2-b=1-\frac{28}{27}=-\frac{1}{27}$, e per conseguenza $\frac{a^2-b}{k^2}=-\frac{1}{27k^2}$, che sarà un cubo ove si prenda $k=1$; in questa supposizione sarà $c^3=-\frac{1}{27}$, e quindi $c=-\frac{1}{3}$. Sostituendo questi valori nella equazione (ζ''), otterremo $1=x^3+$ $+3x(x^2+\frac{1}{3})=4x^3+x$, ovvero $4x^3+x-1=0$, la quale posto $x=\frac{x'}{2}$, si trasforma nella seguente $x'^3+x'-2=0$. Ora questa trasformata contiene una sola radice razionale $=1$; dunque la equazione $4x^3+x-1=0$ avrà una sola radice razionale $=\frac{1}{2}$. Sarà perciò $x=\frac{1}{2}$ ed $y=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}=\frac{21}{36}$, e la cercata radice $=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{21}$, tale cioè quale fu accennata sopra (201).

Debba in secondo luogo estrarsi la radice cubica dal binomio immaginario $-3+\frac{10}{9}\sqrt{-3}$. Avremo $a=-3$, $\sqrt{b}=\frac{10}{9}\sqrt{-3}$, $b=-\frac{100}{27}$, $a^2-b=$ $=9+\frac{100}{27}=\frac{343}{27}$, $\frac{a^2-b}{k^2}=\frac{343}{27k^2}$, che sarà un cubo perfetto $=\frac{7^3}{3^3}$ prendendo $k=1$, nel qual caso sarà $c=\frac{7}{3}$. Sostituendo questi valori, la equa-

zione (ζ'') diventerà $-3=x^3+3x(x^2-\frac{7}{3})$, la quale riducesi alla seguente $4x^3-7x+3=0$: questa poi, facendo $x=\frac{x'}{2}$, si trasforma in $x'^3-7x'+$ $+6=0$, le cui radici sono tutte razionali, cioè 1, 2, -3; adunque ancora la equazione $4x^3-7x+3=0$ avrà tutte le sue radici razionali ed uguali ad $\frac{1}{2}$, 1, $-\frac{3}{2}$. Ora ad $x=\frac{1}{2}$ corrisponde $y=\frac{1}{4}-\frac{7}{3}=-\frac{25}{12}$, per $x=1$ risulta $y=1-\frac{7}{3}=-\frac{4}{3}$, e per $x=-\frac{3}{2}$ si ha $y=\frac{9}{4}-\frac{7}{3}=$ $=-\frac{1}{12}$. Adunque il binomio proposto avrà le tre radici cubiche

$$\frac{1}{2}-\frac{5}{6}\sqrt{-3},\ 1+\frac{2}{3}\sqrt{-3},\ -\frac{3}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{-3},$$

delle quali solo la seconda fu accennata nel citato numero 201.

Abbiamo supposto sopra il numero m dispari; supponiamolo ora pari ed $=2n$, sarà $\sqrt[2n]{a+\sqrt{b}}$ della forma $(\sqrt{x}+\sqrt{y})\sqrt[2n]{k}$, poichè elevando questa quantità alla potenza $2n$, essa non conterrà che un solo radicale $\sqrt{xy}$. Infatti ponendo

$$\sqrt[2n]{a+\sqrt{b}}=(\sqrt{x}+\sqrt{y})\sqrt[2n]{k},$$

otterremo

$$a+\sqrt{b}=k(x^n+\frac{2n(2n-1)}{2}x^{n-1}y+$$

$$+\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{2.3.4}x^{n-2}y^2+\ldots\ldots\ldots)+$$

$$+k\sqrt{xy}(2nx^{n-1}+\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{2.3}x^{n-2}y+\ldots),$$

e quindi

$$a=k(x^n+\frac{2n(2n-1)}{2}x^{n-1}y+\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{2.3.4}x^{n-2}y^2+\ldots)\ldots(\zeta'''),$$

$$\sqrt{b}=k\sqrt{xy}(2nx^{n-1}+\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{2.3}x^{n-2}y+\ldots\ldots)\ldots(\zeta^{iv}).$$

Avremo dunque $\sqrt[2n]{a+\sqrt{b}}\times\sqrt[2n]{a-\sqrt{b}}=(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})\sqrt[2n]{k^2}$, ossia $\sqrt[2n]{\frac{a^2-b}{k^2}}=x-y$, e quindi acciò x ed y sieno razionali, converrà che sia

$\frac{a^2-b}{k^2}$ una potenza $2n^{sima}$; onde una condizione necessaria si è che a^2-b sia un quadrato, perchè tanto k^2 che la frazione $\frac{a^2-b}{k^2}$ è un quadrato. Posto ciò, si cerchi per k un numero tale, che $\frac{a^2-b}{k^2}$ diventi una potenza c^{2n} (e ciò sarà sempre possibile, perchè si può prendere k in modo che sia $k^2=(a^2-b)^{n+1}$, ovvero $k^2=(a^2-b)^{-n+1}$), avremo $c=x-y$, ossia $y=x-c$, e sostituendo questo valore nella equazione (ζ'''), otterremo la seguente altra

$$a=k(x^n+\frac{2n(2n-1)}{2}x^{n-1}(x-c)+$$

$$+\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{2.3.4}x^{n-2}(x-c)^2+\ldots)\ldots(\zeta^{r}),$$

le radici razionali della quale ci daranno i valori cercati di x.

Vogliasi per esempio la radice quarta del binomio $14+8\sqrt{3}$; avremo $a=14$, $\sqrt{b}=8\sqrt{3}=\sqrt{192}$, $b=192$, $a^2-b=4$, che è un quadrato. Ora per rendere $\frac{a^2-b}{k^2}=4\frac{1}{k^2}$ una quarta potenza, prendiamo $k=\frac{1}{2}$; sarà $\frac{a^2-b}{k^2}=16=c^4$, cioè $c=2$. Per la qual cosa la equazione (ζ^{r}) diventerà $14=\frac{1}{2}(x^2+6x(x-2)+(x-2)^2)$, la quale riducesi ad $x^2-2x-3=0$, che ci dà $x=3$. Ma ad $x=3$ corrisponde $y=1$; sarà dunque

$$(\sqrt{3}+1)\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\text{, ovvero }\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt[4]{2}}$$

la cercata radice quarta del binomio $14+8\sqrt{3}$.

CAPO XIII.

DEL MODO DI TROVARE LE RADICI IRRAZIONALI DELLE EQUAZIONI NUMERICHE.

214. Allorchè una data equazione si è resa libera da tutti i divisori del primo grado corrispondenti alle sue radici razionali, la risultante equazione non potrà contenere altre radici reali che le irrazionali.

La vera forma delle radici reali irrazionali di una equazione di un qualunque grado, si rimarrà incognita finchè non si avranno dei metodi generali per risolvere le equazioni algebriche dei gradi superiori al quarto. Ma quantunque la determinazione della vera forma delle radici irrazionali sia un problema mai più risoluto, vi hanno nondimeno dei metodi generali, per via dei quali può sempre il valore numerico di ciascuna di esse ottenersi così prossimo al vero, che l'errore commesso sia di qualunque data quantità minore.

Supponiamo per ora che una sola radice reale irrazionale della proposta venga compresa tra due numeri interi consecutivi; in appresso considereremo altresì il caso, in cui tra due numeri interi consecutivi si comprendono più radici.

215. Avendo determinato (178) il limite superiore delle radici positive, e quello ancora delle radici negative di una data equazione, si troverà la parte intera di ciascuna delle sue radici irrazionali sostituendo nella equazione medesima in luogo di x la serie naturale dei numeri $0, 1, 2, 3, \ldots$ e $-1, -2, -3, \ldots$ compresi tra i succennati limiti. Infatti tra due numeri, che sostituiti in luogo della incognita in una equazione danno risultamenti di contrarii segni, si comprende per lo meno una radice reale della medesima equazione (182); si rileva da ciò che ciascuna coppia di quei numeri che tra i suddetti danno risultati di segni contrarii comprenderà una radice reale, ed in virtù della supposizione già fatta (214) non ne comprenderà più di una. In tal guisa la parte intera di una qualunque delle radici irrazionali della equazione sarà il più piccolo dei due numeri che la comprendono.

216. Propongasi ora la equazione

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots + T = 0,$$

nella quale le radici irrazionali suppongansi avere le parti intere tutte fra loro differenti. Dinotando con a ed $a+1$ due numeri consecutivi tra i quali si comprende una qualunque delle radici medesime, esprimerà a la parte intera di questa. Per ottenere poi la parte minore della unità, facciamo nella proposta $x = a + \frac{1}{y}$, avremo la trasformata

$$A'y^m + B'y^{m-1} + C'y^{m-2} + D'y^{m-3} + \ldots + 1 = 0,$$

nella quale

$$A' = a^m + Aa^{m-1} + Ba^{m-2} + Ca^{m-3} + \ldots\ldots\ldots + T,$$
$$B' = ma^{m-1} + (m-1)Aa^{m-2} + (m-2)Ba^{m-3} + \ldots\ldots + S,$$
$$C' = \frac{m(m-1)}{2}\, a^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2}\, Aa^{m-3} + \ldots + R,$$
$$D' = \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\, a^{m-3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + Q.$$

Infatti facendo nella equazione proposta $x = a + u$, si otterrà (174) la seguente altra

$$A' + B'u + C'u^2 + D'u^3 + \ldots + u^m,$$

la quale, ove si ponga $u = \frac{1}{y}$, si trasformerà in

$$A' + B'\frac{1}{y} + C'\frac{1}{y^2} + D'\frac{1}{y^3} + \ldots + \frac{1}{y^m} = 0,$$

ovvero in

$$A'y^m + B'y^{m-1} + C'y^{m-2} + D'y^{m-3} + \ldots + 1 = 0.$$

Rappresentiamo per maggior semplicità con $X=0$ la proposta, e con $Y=0$ la trasformata; essendo questa trasformata del medesimo grado della proposta, sarà conseguentemente il numero delle radici uguale in entrambe le equazioni.

Or la relazione $x=a+\frac{1}{y}$, la quale ci dà i valori di x dipendentemente da quelli di y, chiaramente ci fa vedere che siccome tra i valori di x uno solamente vien compreso tra a ed $a+1$, così ancora tra i valori reali di y uno solamente dovrà trovarsene più grande di 1. Se dunque nella equazione $Y=0$ si sostituiscano ad y i numeri interi 1, 2, 3, . . . si otterrà presto o tardi una variazione di segno che verrà prodotta da quei due numeri tra i quali comprendesi il valore di y maggiore di 1.

Dicansi b e $b+1$ questi numeri; ponendo nella $Y=0$, $y=b+\frac{1}{y_1}$ ne risulterà una nuova trasformata $Y_1=0$, la quale fra le sue radici reali ne conterrà una solamente maggiore di 1.

Sieno c e $c+1$ quei due tra i numeri interi 1, 2, 3, . . . che comprendono questo valore di y_1 maggiore di 1, e che per conseguenza sostituiti nella $Y_1=0$ in luogo di y_1 producono una variazione di segno; facendo $y_1=c+\frac{1}{y_2}$ nella $Y_1=0$, si otterrà una terza trasformata $Y_2=0$, la quale avrà pure una sola radice più grande di 1. Si chiamino d e $d+1$ i due numeri che la comprendono; ponendo nella $Y_2=0$, $y_2=d+\frac{1}{y_3}$, sarà agevole protrarre siffatta serie di trasformazioni finchè si vorrà. Posto ciò, poichè

$$x=a+\frac{1}{y},\ y=b+\frac{1}{y_1},\ y_1=c+\frac{1}{y_2},\ y_2=d+\frac{1}{y_3},\ \ldots$$

le espressioni

$$\frac{a}{1},$$

$$a+\frac{1}{b}=\frac{ab+1}{b},$$

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}=\frac{abc+a+c}{bc+1},$$

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}=\frac{abcd+ab+ad+cd+1}{bcd+b+d},$$

ec. ec. . . . .

convergeranno sempre più verso il vero valore della radice cercata, in modo però che la prima sarà minore della radice, la seconda maggiore, la terza di nuovo minore, e così di seguito; cosicchè il valore cercato cadrà tra due frazioni consecutive.

217. Applichiamo ora il metodo già esposto alla equazione

$$x^3-5x-3=0 \ . \ . \ . \ (1).$$

Il limite superiore delle radici positive di essa è $+3$, e -2 è il limite superiore delle radici negative (178). Sostituendo pertanto successivamente in luogo di x nella proposta i numeri

$$-2, -1, 0, +1, +2, +3,$$

si ottengono i seguenti risultati

$$-1, +1, -3, -7, -5, +9,$$

i quali mostrano che la equazione ha le sue tre radici reali, una positiva compresa fra 2 e 3, e due negative comprese rispettivamente fra 0 e -1, fra -1 e -2; sarà quindi 2 la parte intera della prima radice, la parte intera della seconda sarà nulla, e -1 sarà quella della terza.

Per trovare la parte più piccola della unità della prima radice, pongasi nella equazione (1) $x=2+\frac{1}{y}$; avremo (216) un'altra equazione che avrà la forma seguente

$$A'y^3+B'y^2+C'y+1=0;$$

nella quale

$$\begin{aligned}A' &= (2)^3-5(2)-3=-5;\\ B' &= 3(2)^2-5 \ \ldots = +7,\\ C' &= 3(2) \ \ldots\ldots = +6,\\ D' &= 1 \ \ldots\ldots\ldots = +1.\end{aligned}$$

Laonde sostituendo e mutando i segni, risulterà

$$5y^3-7y^2-6y-1=0 \ . \ . \ . \ . \ (2).$$

Facendo in questa successivamente $y=1, 2, 3, \ldots$ otterremo rispettivamente $-9, -1, +53, \ldots$ donde si scorge che il valore cercato di y è compreso fra 2 e 3.

Mettendo ora nella equazione (2) $y=2+\frac{1}{y_1}$, avremo la trasformata

$$A''y_1^3+B''y_1^2+C''y_1+D''=0,$$

nella quale

$$\begin{aligned}A'' &= 5(2)^3-7(2)^2-6(2)-1=-1,\\ B'' &= 15(2)^2-14(2)-6 \ \ldots = +26,\\ C'' &= 15(2)-7 \ \ldots\ldots = +23,\\ D'' &= 5 \ \ldots\ldots\ldots\ldots = +5;\end{aligned}$$

e quindi, sostituendo e mutando i segni,

$$y_1^3 - 26y_1^2 - 23y_1 - 5 = 0 \quad \ldots \quad (3).$$

Ora scrivendo questa equazione nel modo seguente

$$y_1^2(y_1 - 26) - 23y_1 - 5 = 0,$$

si vede chiaro che sostituendo in essa in luogo di y_1 i numeri 1, 2, 3, ... fino a 26, il risultato sarà sempre negativo; facendo poi successivamente $y_1 = 26$, 27, ... si ottiene -603, $+103$, ...; dunque il cercato valore di y_1 vien compreso fra 26 e 27.

Facendo quindi nella equazione (3) $y_1 = 26 + \frac{1}{y_2}$, la nuova trasformata sarà della forma

$$A'''y_2^3 + B'''y_2^2 + C''y_2 + D'' = 0,$$

nella quale

$$A''' = (26)^3 - 26(26)^2 - 23(26) - 5 = -603,$$
$$B''' = 3(26)^2 - 52(26) - 23 \quad \ldots \quad = +653,$$
$$C'' = 3(26) - 26 \quad \ldots\ldots\ldots \quad = +52,$$
$$D'' = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad = +1;$$

e quindi, sostituendo e mutando i segni,

$$603y_2^3 - 653y_2^2 - 52y_2 - 1 = 0 \quad \ldots \quad (4).$$

Il primo membro di questa equazione, facendo successivamente $y_2 = 1, 2, \ldots$ riducesi rispettivamente a -103, $+2107$, ... e perciò il valore di y_2 maggiore di 1 è compreso fra 1, e 2. Ponendo di nuovo $y_2 = 1 + \frac{1}{y_3}$ nella (4), si otterrà, dopo di avere eseguito l'intero calcolo,

$$103y_3^3 - 451y_3^2 - 1156y_3 - 603 = 0 \quad \ldots \quad (5).$$

Questa equazione fa conoscere il valore di y_3 maggiore di 1 essere compreso fra 6 e 7, cosicchè, ove si volesse protrarre la operazione, farebbe d'uopo mettere nella (5) $y_3 = 6 + \frac{1}{y_4}$. Ma fermandoci a considerare i risultati già ottenuti, avremo i seguenti valori sempre più convergenti verso il vero valore della cercata radice, cioè

$$\frac{2}{1},$$

$$2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2},$$

$$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{26}}=\frac{132}{53},$$

$$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{26+\cfrac{1}{1}}}=\frac{137}{55},$$

$$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{26+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6}}}}=\frac{954}{383}.$$

Riducendo (62) in decimali la frazione $\frac{954}{383}$, si ha 2,49086, il qual numero non differisce dal vero valore della radice cercata neppure di un centomillesimo.

Per ciò che riguarda i valori delle due radici negative della proposta equazione (1), pongasi in essa $-x$ in luogo di x, sarà la trasformata

$$x^3-5x+3=0\ ;$$

le cui radici positive prese col segno —, esprimeranno le radici negative della proposta. Ora istituendo su questa trasformata operazioni analoghe alle precedenti, per la radice compresa fra 0 e 1 si troverà 0, 65662, e per l'altra compresa fra 1 e 2 si otterrà 1, 83424. Adunque per le tre radici della proposta equazione

$$x^3-5x-3=0$$

avremo prossimamente

$$x=2,49086\ ,\ x=-0,65662\ ,\ x=-1,83424.$$

218. Questo metodo, come ognun vede, suppone non avere la proposta equazione che una sola radice compresa fra i due numeri interi consecutivi a ed $a+1$; infatti per ciò è solamente che può asserirsi ciascuna delle trasformate avere una sola radice più grande di 1, e conseguentemente che la sostituzione dei numeri 1, 2, 3, ... in luogo di y, y_1, y_2, y_3, ... nelle trasformate medesime produca presto o tardi una variazione di segno.

Supponiamo ora che tra i due numeri a ed $a+1$ vengano comprese due sole radici della proposta; ponendo in essa $x=a+\frac{1}{y}$, la trasformata che quindi si dedurrà, avrà due radici solamente maggiori di 1. Or sostituendo in questa trasformata ad y la serie dei numeri 1, 2, 3, ..., nel solo caso che si abbiano due variazioni di segno potranno le succennate radici col metodo esposto sopra (216) determinarsi; poichè supposto che p e $p+1$, q e $q+1$ sieno i nu-

meri che producono siffatte variazioni di segno, ponendo nella trasformata in luogo di y prima $p+\frac{1}{y_1}$ e poi $q+\frac{1}{z_1}$ si ottengono due nuove trasformate, delle quali ciascuna avrà una sola radice più grande di 1; e quindi operando separatamente su di esse come nei numeri precedenti, si avranno per determinare i valori delle due radici della proposta, espressioni della seguente forma

$$a+\frac{1}{p}=\frac{ap+1}{p},$$

$$a+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{p'}}=\frac{app'+a+p'}{pp'+1},$$

$$a+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{p'+\cfrac{1}{p''}}}=\frac{app'p''+ap+ap''+p'p''+1}{pp'p''+p+p''},$$

ec. . . . . . .

$$a+\frac{1}{q}=\frac{aq+1}{q},$$

$$a+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{q'}}=\frac{aqq'+a+q'}{qq'+1},$$

$$a+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{q'+\cfrac{1}{q''}}}=\frac{aqq'q''+aq+aq''+q'q''+1}{qq'q''+q+q''},$$

ec. . . . . . .

Ho detto che sostituendo nella trasformata, la quale si ha dal mettere nella proposta $x=a+\frac{1}{y}$, i numeri 1, 2, 3, . . . , nel solo caso in cui si abbiano due variazioni di segno potranno col metodo esposto sopra determinarsi entrambe le radici della proposta comprese fra a ed $a+1$. Nella supposizione che ciò non avesse luogo, il metodo cadrebbe in difetto, e per ottenere la completa separazione delle radici farebbe d' uopo ricorrere ad altre trasformazioni. Vedremo in seguito in qual modo convenga adoperarci in siffatte circostanze.

219. Le radici irrazionali delle equazioni possono determinarsi con un altro metodo, del quale andiamo debitori al celebre Newton. Questo metodo generalmente parlando ha il vantaggio di presentarci approssimazioni molto più rapide di quelle che si ottengono col metodo già esposto nei numeri precedenti, e che tutto si deve al signor Lagrange.

Per averne una prima idea, riprendiamo la equazione

$$x^3-5x-3=0,$$

e proponiamoci di determinarne la radice compresa fra 2 e 3. A fine di maggiormente avvicinare fra loro i limiti di questa radice, mettiamo nella proposta $x=2,5$, otterremo $+0, 125$. D'altronde ponendo nella medesima $x=2$ si ha -5; adunque la radice sarà compresa fra 2 e 2,5. Ora ciocchè risulta dal mettere nella proposta $x=2,5$ non differisce tanto dal zero quanto ciò che risulta dal sostituire 2 in luogo di x; laonde la cercata radice è più prossima a 2,5 che a 2. Ponendo pertanto nella equazione $x=2,4$ si trova $-1, 176$: ma $x=2,5$ dà $+0, 125$; adunque la radice è compresa fra 2,4 e 2,5.

Continuando in tal guisa è chiaro che i due limiti della radice sempre più si avvicineranno fra loro. Ma allorchè si è ottenuto, come nel nostro caso, il valore della radice differente dal vero per meno di 0, 1, potremo con la massima rapidità accostarci a questo vero valore nel seguente modo, nel quale consiste principalmente il metodo del Newton.

Facciamo nella proposta $x=2,4+u$, avremo (174) la trasformata

$$A'+B'u+C'u^2+u^3=0,$$

in cui

$$A'=(2,4)^3-5(2,4)-3=-1,176,$$

$$B'=3(2,4)^2-5\ .\ .\ .\ .\ =+12,28,$$

$$C'=3(2,4)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ =+7,2,$$

donde si ricaverà

$$u=-\frac{A'}{B'}-\frac{C'}{B'}u^2-\frac{1}{B'}u^3.$$

Ciò posto, poichè una delle tre radici di questa equazione deve essere minore di 0, 1, ciocchè si fa chiaro dalla relazione $x=2,4+u$, il corrispondente valore di u^2 sarà minore di 0, 01, e quello di u^3 minore di 0, 001; d'altronde le quantità $\frac{C'}{B'}$, $\frac{1}{B'}$ sono minori di 1; adunque la quantità $\frac{C'}{B'}u^2+\frac{1}{B'}u^3$ sarà certamente minore di 0, 01. Laonde, trascurando questa quantità minore di 0, 01, potrà mettersi $u=-\frac{A'}{B'}$. Ma

$$-\frac{A'}{B'}=\frac{1,176}{12,28}=0,09\ .\ .\ .\ .$$

sarà quindi $u=0, 09$ ... e per conseguenza si otterrà $x=2,4+0,09=2,49$ differente dal vero valore per quasi 0, 01. Infatti nel primo membro della proposta facendo $x=2,49$ avremo $-0,011751$ mentre per $x=2,50$ si ha $+0,125$. Pongasi ora nella proposta $x=2,49+u_1$; la trasformata sarà

$$A''+B''u_1+C''u_1^2+u_1^3=0,$$

nella quale

$$A'' = (2,49)^3 - 5(2,49) - 3 = -\ 0,011751\ ,$$
$$B'' = 3(2,49)^2 - 5\ \ldots\ldots = +13,6003\ ,$$
$$C'' = 3(2,49)\ \ldots\ldots\ldots = +\ 7,47\ ,$$

donde si dedurrà

$$u_1 = -\frac{A''}{B''} - \frac{C''}{B''}u_1^2 - \frac{1}{B''}u_1^3.$$

Ora uno dei valori di u_1 è minore di o, 01, per conseguenza i valori corrispondenti di u_1^2 e u_1^3 saranno minori di o, 0001 e o, 000001 ; d'altronde le quantità $\frac{C''}{B''}$, $\frac{1}{B''}$ sono minori della unità ; potrà dunque, trascurando la quantità $\frac{C''}{B''}u_1^2 + \frac{1}{B''}u_1^3$ minore di 0,0001, porsi $u_1 = -\frac{A''}{B''}$. Ma

$$-\frac{A''}{B''} = \frac{0,011751}{13,6003} = 0,0008\ \ldots$$

sarà perciò $u_1 = 0,0008\ \ldots$, e conseguentemente si avrà $x = 2,\ 49 + 0,0008 = 2,4908$ differente dal vero valore per meno di 0,0001. È agevole infatti il convincersene, perchè sostituendo nella proposta in luogo di x successivamente i numeri 2,4908, 2,4909, i risultati che si ottengono sono affetti da segni contrarii.

Ove di nuovo si ponesse $x = 2,4908 + u_2$ nella proposta equazione, si giugnerebbe ad avere un valore di x, il quale non differirebbe dal vero che per 0,00000001 a un dipresso.

220. Vediamo ora generalmente in qual maniera debba praticarsi il metodo del Newton. Sieno a ed $a+1$ i due numeri consecutivi tra i quali comprendesi il vero valore di una delle radici irrazionali della equazione proposta. Sostituendo in questa una serie di numeri compresi fra a e $a+1$, se ne troverà tosto uno differente per meno di o,1 dal vero valore della cercata radice.

Chiamando x' questo numero, e facendo $x = x' + u$ nella proposta, si otterrà la trasformata

$$A' + B'u + C'u^2 + \ \ldots\ + u^m = 0\ ,$$

da cui si dedurrà

$$u = -\frac{A'}{B'} - \frac{C'}{B'}u^2 - \ \ldots\ - \frac{1}{B'}u^m.$$

Nel secondo membro di questa equazione la somma dei termini che vengono dopo il primo termine $-\frac{A'}{B'}$, generalmente parlando, è minore di o, 01 ; trascurando dunque questa quantità minore di o, 01, avremo $u = -\frac{A'}{B'}$. Questo valore calcolato fino ai centesimi inclusivamente, e aggiunto a quello di x', ci darà un secondo valore della radice differente dal vero per meno di 0,01.

Chiamisi x'' questo secondo valore, e nella proposta pongasi $x = x'' + u_1$,

si avrà la trasformata

$$A''+B''u_1+C''u_1^2+\ .\ .\ .\ +u_1^m=0\,,$$

dalla quale si otterrà

$$u_1=-\frac{A''}{B''}-\frac{C''}{B''}u_1^2-\ .\ .\ .\ -\frac{1}{B''}u_1^m.$$

Trascurando la somma dei termini $\frac{C''}{B''}u_1^2, \ldots, \frac{1}{B''}u_1^m$, la quale è per ipotesi minore di 0,0001, calcolando inoltre il termine $-\frac{A''}{B''}$ fino ai diecimillesimi inclusivamente, e aggiugnendo il risultato ad x'', si dedurrà un terzo valore della radice che dal vero differirà per meno di 0,0001.

Dicasi x''' questo terzo valore, e facciasi nella proposta $x=x'''+u_2$; nel calcolare la espressione $-\frac{A'''}{B'''}$ che da tale trasformazione risulta, protraggasi la operazione fino alla ottava cifra decimale inclusivamente, quindi aggiungasi il risultato ad x'''; si otterrà un quarto valore della cercata radice dal vero differente per meno di 0,00000001; e così di seguito.

Siffatta serie di operazioni dovrà ripetersi per ciascuna delle radici positive; per ciò che riguarda le radici negative, la loro ricerca si farà dipendere da quella delle positive, sostituendo nella proposta $-x$ ad x (217).

221. Il metodo già esposto tutto si fonda nella supposizione che nella equazione trasformata

$$u=-\frac{A'}{B'}-\frac{C'}{B'}u^2-\ .\ .\ .\ -\frac{1}{B'}u^m$$

possa trascurarsi la somma dei termini affetti dalle potenze $u^2, \ldots, u^m$ senza sensibile errore sopra i centesimi; che nell'altra

$$u_1=-\frac{A''}{B''}-\frac{C''}{B''}u_1^2-\ .\ .\ .\ -\frac{1}{B''}u_1^m$$

possa trascurarsi la somma dei termini che contengono le potenze $u_1^2, \ldots, u_1^m$ senza errore sensibile sopra i diecimillesimi; e così di seguito. Or questo metodo cade alcuna volta in difetto, come lo ha dimostrato il signor Lagrange nel suo *trattato della risoluzione delle equazioni numeriche*. Vi ha però un mezzo per assicurarsi infine di ciascuna operazione se mai siasi ottenuto quel grado di approssimazione che si credeva dovere aver luogo. Ad esempio, per conoscere se veramente 2,4908 esprima il valore della radice positiva della equazione $x^3-5x-3=0$ differente dal vero per meno di 0,0001, pongasi in questa equazione in luogo di x prima 2,4908, e poi 2,4909 ovvero 2,4907, secondo che il risultato della sostituzione di 2,4908 riesce contrario di segno al risultato della sostituzione di 3 ovvero di 2; se i due numeri 2,4908 e 2,4909, ovvero 2,4908 e 2,4907 danno risultati di segni contrarii, non si potrà in veruna guisa dubitare che sia 2,4908 un valore della radice dal vero differente

per meno di 0,0001: ove poi avvenga il contrario, bisognerà aumentare o diminuire la cifra ultima di una o di più unità dell' ordine dei diecimillesimi fino ad ottenere due numeri che sostituiti come sopra nella equazione diano risultati di segni contrarii.

222. Vi hanno dei casi in cui fa d' uopo calcolare la quantità $-\frac{A'}{B'}$ fino ai millesimi, ed alcuna volta anche fino ai diecimillesimi. Si abbia per esempio la seguente equazione

$$x^3-6x-7=0,$$

la quale ha una radice reale positiva compresa fra 2,9 e 3; facendo quindi in essa $x=2,9+u$, si otterrà la trasformata

$$A'+B'u+C'u^2+u^3=0,$$

nella quale

$$A'=(2,9)^3-6(2,9)-7=-0,011,$$
$$B'=3(2,9)^2-6\ \ldots\ldots =+19,23,$$
$$C'=3(2,9)\ \ldots\ldots\ldots =+8,7.$$

Trascurando i termini affetti dalle potenze u^2, u^3, si avrà

$$t=-\frac{A'}{B'}=\frac{0,011}{19,23}=\frac{11}{19230}.$$

Ora riducendo la frazione ordinaria $\frac{11}{19230}$ in frazione decimale, le tre prime cifre di questa saranno altrettanti zeri, e la quarta cifra sarà 5; si avrà quindi, trascurando le altre cifre seguenti, $u=0,0005$, e per conseguenza $x=2,9005$. Posto ciò, pongasi nella proposta $x=2,9005$; si troverà $-0,00138$: questo risultato è di segno contrario all' altro che si ottiene facendo $x=3$, e però (221) sostituiscasi nella proposta 2,9006 ad x; si avrà $+0,00054$ di segno contrario a $-0,00138$. Adunque rappresenterà 2,9005 il valore della succennata radice dal vero differente per meno di 0,0001.

223. Quantunque volte, sostituendo nella equazione proposta in luogo della incognita i numeri interi consecutivi compresi fra il limite superiore delle radici positive, ed il limite superiore delle radici negative, risultano tante variazioni di segno quante unità si contengono nel grado della equazione; è chiaro che la medesima ha tutte le sue radici reali, le cui parti intere sono tutte differenti fra loro. Ma allorchè il numero delle variazioni di segno risulta minore del grado della proposta, le radici di lei sono parte reali e parte immaginarie, ovvero tutte reali, ma però parecchie di esse comprese fra due numeri interi consecutivi. Infatti si è dimostrato già sopra (182) che due quantità, le quali sostituite nel primo membro di una equazione danno risultati di segni contrarii, possono comprendere un numero dispari qualunque di radici reali, e che due quantità, le quali danno risultati del medesimo segno ne possono comprendere un numero pari qualunque. Così per esempio, se una equazione contenesse fra le sue radici le due seguenti $\sqrt{2}$, e $\sqrt{3}$ le quali sono comprese fra 1 e 2; sostituendo successivamente

1 e 2 nella proposta si otterrebbero risultati del medesimo segno. Similmente se un' altra equazione avesse per radici le tre quantità $\sqrt{11}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{15}$ comprese fra 3 e 4; questi numeri sostituiti nella equazione darebbero risultati di segni contrarii. Si vede adunque che il metodo di sostituire nella proposta i numeri interi consecutivi compresi fra il limite superiore delle radici positive e il limite superiore delle radici negative sarebbe in tal caso insufficiente per farci venire in cognizione del numero delle radici reali della medesima, e che andrebbe incontro all' inconveniente di lasciarne sfuggire alcuna. Questo inconveniente però cesserebbe, ove potesse determinarsi da principio una quantità δ minore della più piccola differenza che passa tra due qualsivoglia radici reali della proposta. Poichè sia posta la quantità δ per distanza fra due sostituzioni successive; è chiaro che i due numeri i quali avrebbero per differenza δ, e che, fatta la sostituzione, darebbero risultamenti di contrarii segni, non comprenderebbero più che una radice, laddove se dessero risultati del medesimo segno non ne comprenderebbero alcuna. Così il numero delle radici reali della equazione si troverebbe uguale al numero delle variazioni di segno ottenute per mezzo della sostituzione. Si vede pertanto che il tutto riducesi a trovare qual sia la minima tra le differenze delle radici reali della data equazione, ovvero solamente a conoscere un limite al di sotto del quale essa non potrebbe cadere.

224. Proposta perciò la equazione

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + Dx^{m-4} + \ldots = 0,$$

cerchiamone un' altra, nella quale la incognita u sia uguale alle differenze tra le radici della proposta. Sieno α, β, γ, δ, ... le radici della equazione data; i valori di u saranno $\alpha-\beta$, $\alpha-\gamma$, $\alpha-\delta$, ... $\beta-\alpha$, $\beta-\gamma$, $\beta-\delta$, ... $\gamma-\alpha$, $\gamma-\beta$, $\gamma-\delta$, ... $\delta-\alpha$, $\delta-\beta$, $\delta-\gamma$, ... i quali, come è chiaro, saranno $m(m-1)$ di numero, e due qualunque di essi per esempio $\alpha-\beta$ e $\beta-\alpha$ saranno uguali e di segni contrarii. Quindi conseguita che la equazione in u sarà priva di tutte le potenze dispari di u, dovendo essa rimanere la stessa se invece di u vi si pone $-u$; facendo dunque $m(m-1)=2n$, la cercata equazione sarà della forma

$$u^{2n} + A'u^{2(n-1)} + B'u^{2(n-2)} + C'u^{2(n-3)} + D'u^{2(n-4)} + \ldots = 0,$$

ovvero della seguente altra

$$y^n + A'y^{n-1} + B'y^{n-2} + C'y^{n-3} + D'y^{n-4} + \ldots = 0,$$

ponendo cioè $u^2 = y$.

Per determinare i coefficienti A', B', C', D', ... di questa equazione, rappresentisi con $P^{(r)}$ la somma delle potenze r^{sime} delle radici della proposta; avremo (167)

$$P = -A,$$
$$P^{(2)} = -AP - 2B,$$
$$P^{(3)} = -AP^{(2)} - BP - 3C,$$
$$P^{(4)} = -AP^{(3)} - BP^{(2)} - CP - 4D,$$
ec. . . . .

Inoltre si esprima con $Q^{(r)}$ la somma delle potenze r^{sime} delle radici della trasformata, cioè la somma dei binomii $(\alpha-\beta)^{2r}$, $(\alpha-\gamma)^{2r}$, $(\alpha-\delta)^{2r}$, . . . $(\beta-\gamma)^{2r}$, $(\beta-\delta)^{2r}$, . . . $(\gamma-\delta)^{2r}$, . . . e facilmente si vedrà che il valore di $Q^{(r)}$ conterrà primieramente le potenze $2r^{sime}$ delle radici della proposta equazione moltiplicate per $m-1$, perchè in $m-1$ binomii è compresa ciascuna di queste radici; poi conterrà la somma dei termini della forma $\alpha^{2r-1}\beta$ moltiplicati per $-2r$; quindi la somma dei termini della forma $\alpha^{2r-2}\beta^2$ moltiplicati per $\frac{2r(2r-1)}{2}$; poi quella dei termini della forma $\alpha^{2r-3}\beta^3$ moltiplicati per $-\frac{2r(2r-1)(2r-2)}{2.3}$; e così di seguito. Laonde sarà

$$Q^{(r)}=(m-1)P^{(2r)}-2rP^{(2r-1,1)}+\frac{2r(2r-1)}{2}P^{(2r-2,2)}-\ldots\pm$$
$$\pm\frac{2r(2r-1)\ldots(r+1)}{2.3\ldots r}\cdot\frac{P^{(r,r)}}{2},$$

e sostituendo i valori di $P^{(2r-1,1)}$, $P^{(2r-2,2)}$, ec. . . . (169)

$$Q^{(r)}=(m-1)P^{(2r)}-2rP.P^{(2r-1)}+\frac{2r(2r-1)}{2}P^{(2)}.P^{(2r-2)}-\ldots\pm$$
$$\pm\frac{2r(2r-1)\ldots(r+1)}{2.3\ldots r}\cdot\frac{P^{(r)}.P^{(r)}}{2}+$$
$$+P^{(2r)}\left(2r-\frac{2r(2r-1)}{2}+\ldots\mp\frac{2r(2r-1)\ldots(r+1)}{2.2.3\ldots r}\right).$$

Ma $2r-\frac{2r(2r-1)}{2}+\ldots\mp\frac{2r(2r-1)\ldots(r+1)}{2.2.3\ldots r}=-\frac{(1-1)^{2r}}{2}+1=1$; dunque avremo

$$Q^{(r)}=mP^{(2r)}-2rP.P^{(2r-1)}+\frac{2r(2r-1)}{2}P^{(2)}.P^{(2r-2)}-\ldots\pm$$
$$\pm\frac{2r(2r-1)\ldots(r+1)}{2.3\ldots r}\cdot\frac{P^{(r)}.P^{(r)}}{2},$$

ove nell' ultimo termine si deve prendere il segno + se r è pari, ed il segno − se r è dispari. Determinati i valori delle quantità Q, $Q^{(2)}$, $Q^{(3)}$, $Q^{(4)}$, . . . i coefficienti A', B', C', D', . . . della trasformata saranno dati dalle seguenti formole

$$Q=-A',$$
$$Q^{(2)}=-A'Q-2B',$$
$$Q^{(3)}=-A'Q^{(2)}-B'Q-3C',$$
$$Q^{(4)}=-A'Q^{(3)}-B'Q^{(2)}-C'Q-4D',$$
ec. . . . . . .

Dai coefficienti dunque della proposta si dedurranno primieramente i valori di P, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$, . . . $P^{(2n)}$; poi da essi i valori di Q, $Q^{(2)}$, $Q^{(3)}$, . . . $Q^{(n)}$; e da questi finalmente i coefficienti A', B', C', D', . . . Qui poi giova il riflettere che la trasformata sarà la medesima quantunque tutte le radici della proposta si accrescano o si diminuiscano della medesima quantità. Onde se dalla proposta si toglierà il secondo termine (175), la trasformata sarà la medesima, ma però si determineranno più agevolmente i suoi coefficienti. Poichè allora si avrà $A=0$, e quindi

$$P = 0,$$

$$P^{(2)} = -2B,$$

$$P^{(3)} = -3C,$$

$$P^{(4)} = -BP^{(2)} - 4D,$$

ec. . . . .

$$Q = mP^{(2)},$$

$$Q^{(2)} = mP^{(4)} + 6\frac{P^{(2)}.P^{(2)}}{2},$$

$$Q^{(3)} = mP^{(6)} + 15\ P^{(2)}.P^{(4)} - 20\frac{P^{(3)}.P^{(3)}}{2},$$

ec. . . . . . .

$$A' = -Q,$$

$$B' = -\frac{A'Q + Q^{(2)}}{2},$$

$$C' = -\frac{A'Q^{(2)} + B'Q + Q^{(3)}}{3},$$

$$D' = -\frac{A'Q^{(3)} + B'Q^{(2)} + C'Q + Q^{(4)}}{4},$$

ec. . . . .

225. Volendo fare l'applicazione di ciò che si è detto a qualche esempio particolare

1.° Sia proposta la equazione

$$x^3 - 2x - 5 = 0;$$

avremo $m=3$, e quindi $2n = m(m-1) = 6$, donde $n=3$. La trasformata in y sarà dunque della seguente forma

$$y^3 + A'y^2 + B'y + C' = 0.$$

Ora $A=0$, $B=-2$, $C=-5$; sarà perciò $P=0$, $P^{(2)}=4$, $P^{(3)}=15$, $P^{(4)}=8$, $P^{(5)}=50$, $P^{(6)}=91$; e quindi $Q=12$, $Q^{(2)}=72$, $Q^{(3)}=-1497$. Avremo

dunque $A'=-12$, $B'=36$, $C'=643$; e la cercata equazione sarà per conseguenza

$$y^3-12y^2+36y+643=0.$$

2.° Si abbia la equazione

$$x^3-6x-7=0,$$

si avrà $m=3$ ed $n=3$, e la trasformata sarà pure della forma

$$y^3+A'y^2+B'y+C'=0.$$

Ciò posto, $A=0$, $B=-6$, $C=-7$; e quindi $P=0$, $P^{(2)}=12$, $P^{(3)}=21$, $P^{(4)}=72$, $P^{(5)}=210$, $P^{(6)}=579$; donde si otterranno $Q=36$, $Q^{(2)}=648$, $Q^{(3)}=10287$. I coefficienti dunque della trasformata saranno $A'=-36$, $B'=324$, $C'=459$, e la trasformata medesima sarà

$$y^3-36y^2+324y+459=0.$$

3.° Finalmente si abbia la equazione

$$8x^3-6x-1=0.$$

Scrivendola come segue

$$x^3-\frac{3}{4}x-\frac{1}{8}=0,$$

avremo $n=3$, $A=0$, $B=-\frac{3}{4}$, $C=-\frac{1}{8}$; e quindi $P=0$, $P^{(2)}=\frac{3}{2}$, $P^{(3)}=\frac{3}{8}$, $P^{(4)}=\frac{9}{8}$, $P^{(5)}=\frac{15}{32}$, $P^{(6)}=\frac{57}{64}$; $Q=\frac{9}{2}$, $Q^{(2)}=\frac{81}{8}$, $Q^{(3)}=\frac{1701}{64}$; $A'=-\frac{9}{2}$, $B'=\frac{81}{16}$, $C'=-\frac{81}{64}$: e la equazione dei quadrati delle differenze in y sarà

$$y^3-\frac{9}{2}y^2+\frac{81}{16}y-\frac{81}{64}=0,$$

ovvero

$$64y^3-288y^2+324y-81=0.$$

226. Ritornando ora alla determinazione delle radici irrazionali di una data equazione nel caso che parecchie di esse vengano comprese fra due numeri interi consecutivi, rappresentiamo con $X=0$ la proposta in x, e con $Y=0$ la equazione dei quadrati delle differenze in y. Essendo il quadrato della differenza tra due radici reali qualunque della proposta sempre positivo, le radici positive della $Y=0$ esprimeranno i quadrati delle differenze tra le sole radici reali della proposta $X=0$; laddove i quadrati delle differenze tra le radici immaginarie, o tra una radice reale e una radice immaginaria di questa, corrisponderanno alle radici negative ed immaginarie di quella. Ciò posto, è chiaro che, cercando il limite inferiore delle radici positive della $Y=0$ e da esso estraendo la radice quadrata, si otterrà una quantità minore della più piccola differenza tra due radici reali della proposta: si avrà cioè la quantità δ, della quale si è parlato sopra.

Ora per ottenere il suddetto limite, pongasi (178) $y=\frac{1}{z}$ nella $Y=0$; si avrà per siffatta sostituzione una nuova trasformata $Z=0$. Sia l il limite superiore delle radici positive di $Z=0$; sarà $\frac{1}{l}$ il limite inferiore delle radici positive di $Y=0$, e perciò $\frac{1}{\sqrt{l}}$ esprimerà la cercata quantità δ.

Cercando il limite superiore l delle radici positive della equazione $Z=0$ il più prossimo che sia possibile, si troverà alcuna volta $l<1$; sarà in tal caso $\frac{1}{\sqrt{l}}$, ovvero $\delta>1$; cioè la differenza tra due radici reali qualunque della $X=0$ sarà >1, e per conseguenza il numero delle sue radici reali agguaglierà il numero delle variazioni di segno che erasi ottenuto prima per mezzo della sostituzione dei numeri interi consecutivi.

Ma generalmente parlando si troverà $l>1$, e quindi $\frac{1}{\sqrt{l}}$ ovvero $\delta<1$. In questo caso, allorchè il $\sqrt{l}$ è irrazionale, converrà prendere invece di $\sqrt{l}$ il numero intero k immediatamente a lui superiore, e a più forte ragione sarà $\frac{1}{k}$ minore della minima differenza tra le radici reali della proposta, poichè $\frac{1}{k}<\frac{1}{\sqrt{l}}$. Quindi sostituendo nella proposta $X=0$ la serie dei numeri $0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \ldots 1$, $1+\frac{1}{k}, 1+\frac{2}{k}, \ldots 2, 2+\frac{1}{k}, 2+\frac{2}{k}, \ldots$ fino al limite superiore delle radici positive, e $0, -\frac{1}{k}, -\frac{2}{k}, \ldots -1, -1-\frac{1}{k}, -1-\frac{2}{k}, \ldots -2$, $-2-\frac{1}{k}, -2-\frac{2}{k}, \ldots$ fino al limite superiore delle radici negative, si otterranno tante variazioni di segno quante radici reali ha la proposta.

Ma la sostituzione dei numeri fratti nella proposta potrà pure evitarsi quantunque volte si faccia in essa $x=\frac{v}{k}$. Imperocchè la equazione $V=0$ che quindi risulterà avendo le sue radici k volte più grandi delle radici della proposta $X=0$, saranno ancora le differenze tra due qualunque delle radici di quella, k volte più grandi delle corrispondenti differenze tra le radici di questa, in guisa che, se $\alpha-\beta$ esprima la più piccola delle differenze tra le radici reali della proposta $X=0$, poichè $\alpha-\beta>\frac{1}{k}$, si avrà $k\alpha-k\beta>1$, cioè le differenze tra due radici reali qualunque della nuova equazione $V=0$, saranno maggiori di 1. Adunque sostituendo nella medesima $V=0$ la serie naturale dei numeri $0, 1, 2, 3, \ldots$ e $-1, -2, -3, \ldots$ compresi tra i due limiti superiori, si otterranno nella serie dei risultati tante variazioni di segno, quante sono le sue radici reali. Determinando quindi i valori di queste con i metodi conosciuti, si dedurranno quei delle radici reali della proposta mediante la relazione $x=\frac{v}{k}$.

227. Applichiamo ora siffatta teoria agli esempii seguenti.

1.° Sia data in primo luogo la equazione

$$x^3-6x-7=0.$$

I limiti superiori delle radici positive e delle radici negative sono $+3$ e -2; e però sostituendo i numeri

$$+3,\ +2,\ +1,\quad 0,\ -1,\ -2,$$

si avranno i risultati

$$+2,\ -11,\ -12,\ -7,\ -2,\ -3,$$

dai quali rilevasi che $+3$ e $+2$ sono i soli numeri che producono due risultati di segni contrarii. Potrà quindi concludersi che la proposta ha una sola radice reale e due immaginarie, ovvero che tutte e tre le radici sono reali, ma che le differenze tra le medesime radici considerate a due a due sono minori di 1.

Ma per togliere qualunque incertezza, formisi la equazione dei quadrati delle differenze. Abbiamo sopra (225. 2.°) trovato siffatta equazione essere

$$y^3-36y^2+324y+459=0,$$

la quale, facendo $y=\frac{1}{z}$, si trasforma in

$$z^3+\frac{324}{459}z^2-\frac{36}{459}z+\frac{1}{459}=0.$$

Ora questa trasformata potendo scriversi come segue

$$z^3+\frac{1}{459}+\frac{36}{459}z(9z-1)=0,$$

chiaro si vede che per $z=$, ovvero $>\frac{1}{9}$ si ottiene un risultato positivo. Sarà dunque il limite l delle radici positive di questa trasformata minore di 1, e per conseguenza sarà $\frac{1}{\sqrt{l}}>1$, lo che indica essere le differenze tra le radici reali della proposta considerate a due a due maggiori di 1. Ma la sostituzione dei numeri interi nella proposta non produce che una sola variazione di segno; avrà dunque essa una sola radice reale compresa fra 2 e 3.

2.° Abbiasi in secondo luogo la equazione

$$8x^3-6x-1=0,$$

nella quale i limiti superiori delle radici positive e negative sono evidentemente $+1$ e -1. Facendo in essa successivamente $x=+1$, $=0$, $=-1$, si ottengono i risultamenti che seguono $+1, -1, -3$, nei quali si scorge una sola variazione di segno. Ricorrendo perciò alla equazione dei quadrati delle differenze formata sopra (225.3.°), la quale è

$$64y^3-288y^2+324y-81=0,$$

poniamo $y=\frac{1}{z}$; avremo

$$81z^3-324z^2+288z-64=0.$$

Questa trasformata può scriversi ancora nel modo seguente

$$81z^2(z-4)+32(9z-2)=0\,,$$

per cui agevolmente si dimostra essere 3 il limite superiore delle sue radici positive il più prossimo che si possa ottenere in numeri interi. Sarà dunque $l=3$, $\frac{1}{l}=\frac{1}{3}$, ed $\frac{1}{\sqrt{l}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, e quindi sostituendo al $\sqrt{3}$ il numero intero 2 immediatamente superiore, la frazione $\frac{1}{2}$ sarà certamente minore della più piccola differenza tra due radici reali qualunque della proposta; e però facendo in questa equazione $x=\frac{v}{2}$, la nuova trasformata, che da siffatta sostituzione risulterà, cioè

$$v^3-3v-1=0\,,$$

avrà le radici fra loro differenti per quantità maggiori di 1. Ora i limiti superiori delle radici positive e delle radici negative di questa trasformata sono $+2$ e -2; d'altronde, ponendo nella medesima successivamente

$$v=+2,\ +1,\quad 0,\ -1,\ -2\,,$$

i risultati che quindi si ottengono, cioè

$$+1,\ -3,\ -1,\ +1,\ -3\,,$$

mostrano evidentemente aver essa le tre sue radici reali, la prima compresa fra 1 e 2, la seconda fra 0 e -1, e la terza fra -1 e -2. Adunque eziandio la proposta avrà le tre sue radici reali, la prima compresa fra $\frac{1}{2}$ ed 1, la seconda fra 0 e $-\frac{1}{2}$, e la terza finalmente fra $-\frac{1}{2}$ e -1.

CAPO XIV.

DEL MODO DI TROVARE LE RADICI REALI UGUALI, E LE RADICI IMMAGINARIE DELLE EQUAZIONI NUMERICHE.

228. Fin qui abbiamo parlato delle radici reali disuguali, diciamo ora alcuna cosa delle uguali e delle immaginarie.

Se una data equazione qualunque $X=0$ ha radici reali uguali, la equazione $Y=0$ dei quadrati delle differenze sarà tante volte divisibile per y, quante sono le combinazioni di due delle suddette radici uguali; e quindi dalla forma della trasformata $Y=0$, potrà subito arguirsi il numero delle radici uguali della proposta $X=0$. Suppongasi pertanto che la $X=0$ abbia r radici $=a$; moltiplicandola prima per la serie degli esponenti dei suoi termini e poi dividendola per x, si otterrà una nuova equazione $X'=0$, la quale avrà $r-1$ ra-

dici $=\alpha$. Infatti essendo (191) le radici della prima equazione limiti delle radici della seconda, $r-1$ radici di questa dovranno comprendersi fra i limiti α ed α, per conseguenza saranno $=\alpha$. Similmente se la equazione $X=0$ ha s radici $=\beta$, la equazione $X'=0$ avrà $s-1$ radici $=\beta$; ec. Cercando adunque il massimo comune divisore delle quantità X ed X', questo conterrà i fattori uguali della proposta, ma elevati ad una potenza di una unità minore.

Sia R questo massimo comun divisore, e per X'' si dinoti il quoziente della divisione di X per R; la equazione $X''=0$ conterrà tutte le radici medesime della proposta, ma le radici multiple di questa saranno diventate semplici nella $X''=0$, la quale perciò si potrà trattare con i metodi finora esposti.

Per rendere chiara siffatta teoria con un esempio, sia data la equazione

$$X=x^7-7x^6+10x^5+38x^4-155x^3+221x^2-144x+36=0$$

proveniente dallo sviluppo di

$$X=(x-1)^3(x-2)^2(x^2-9)=0,$$

la quale perciò avrà tre radici $=1$, due $=2$, e le altre disuguali 3 e -3.

Si moltiplichino tutti i suoi termini per gli esponenti della incognita, in guisa che ne nasca l' altra equazione

$$X'=7x^6-42x^5+50x^4+152x^3-465x^2+442x-144=0;$$

avrà questa due radici $=1$, ed una $=2$. Cerchisi il massimo comune divisore R di X e di X'; si troverà

$$R=x^3-4x^2+5x-2,$$

il quale conterrà i fattori uguali della proposta, ma questi innalzati ad una potenza di una unità minore. Si dica X'' il quoziente della divisione di X per R; sarà

$$X''=x^4-3x^3-7x^2+27x-18,$$

ed è chiaro che le radici della equazione

$$X''=x^4-3x^3-7x^2+27x-18=0$$

sono 1, 2, 3, -3, cioè quelle medesime della proposta, se non che le multiple sono diventate semplici.

229. Possono eziandio ottenersi due diverse equazioni, delle quali una contenga le sole radici uguali della proposta, e l' altra le sole radici disuguali. Infatti cercando il massimo comun divisore di X' e di X'' e trovatolo $=R'$, dicasi X''' il quoziente della divisione di X'' per R'; la equazione $X'''=0$ conterrà le sole radici disuguali della proposta, e la equazione $R'=0$ le sole radici uguali e ciascuna di loro presa una sola volta. Le equazioni $R'=0$ ed $X'''=0$ ammettono i metodi esposti sopra.

Nell' esempio del numero precedente cercando il massimo comune divisore R' delle quantità X' ed X'', si troverà

$$R'=x^2-3x+2,$$

e dividendo X'' per R', si otterrà il quoziente

$$X'''=x^2-9\ ;$$

ed è chiaro che le radici di

$$R'=x^2-3x+2=0$$

sono 1 e 2, e quelle di

$$X'''=x^2-9=0$$

sono 3 e -3; cioè la prima equazione contiene le sole radici uguali, e la seconda le sole disuguali della proposta.

230. Dopo di aver trovato tutte le radici reali tanto disuguali che uguali, se vediamo che il loro numero è minore del grado della equazione proposta a risolvere, ne concluderemo che le altre radici sono immaginarie.

Rappresentiamo pertanto con

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+\ .\ .\ .\ +T=0$$

la proposta, e con $a+b\sqrt{-1}$ una qualunque delle radici immaginarie della medesima. Sostituendo in essa $a+b\sqrt{-1}$ in luogo di x, si avrà

$$(a+b\sqrt{-1})^m+A(a+b\sqrt{-1})^{m-1}+B(a+b\sqrt{-1})^{m-2}+$$
$$+C(a+b\sqrt{-1})^{m-3}+\ .\ .\ .+T=0.$$

Sviluppando, se chiamiamo M la somma dei termini reali, ed $N\sqrt{-1}$ quella dei termini immaginarii; avremo

$$M+N\sqrt{-1}=0\text{, ovvero (119)}M=0\text{, }N=0.$$

Queste equazioni contengono le due quantità a, b combinate con i coefficienti A, B, C, . . . , T della proposta. Laonde ove si cerchino tutti i differenti sistemi dei valori di a e di b, in numeri razionali ovvero irrazionali, atti a soddisfare insieme a quelle equazioni, sostituendoli nella formola $a+b\sqrt{-1}$, otterremo successivamente tutte le radici immaginarie della proposta equazione.

231. Ciò premesso, se esprimiamo con α, β, γ, ... le radici reali della proposta, e con $a\pm b\sqrt{-1}$, $a'\pm b'\sqrt{-1}$, . . . le immaginarie, le differenze fra tutte queste radici prese a due a due saranno di quattro specie diverse. La prima sarà delle differenze fra le radici reali, come

$$\alpha-\beta\ ,\ \alpha-\gamma\ ,\ .\ .\ .\ .\ .\ ;$$

la seconda delle differenze fra le radici immaginarie coniugate, come

$$a+b\sqrt{-1}-(a-b\sqrt{-1})=2b\sqrt{-1}\ ,\ a'+b'\sqrt{-1}-(a'-b'\sqrt{-1})=$$
$$=2b'\sqrt{-1}\ ,\ .\ .\ .\ .\ ;$$

la terza delle differenze fra una radice reale ed una radice immaginaria, come

$$\alpha-(a+b\sqrt{-1}),\ \alpha-(a-b\sqrt{-1}),\ \ldots\ldots;$$

e la quarta delle differenze fra le radici immaginarie non coniugate, come

$$a-a'+(b-b')\sqrt{-1},\ a-a'-(b-b')\sqrt{-1},\ \ldots$$

Ora è chiaro che i quadrati delle prime differenze sono numeri essenzialmente positivi; i quadrati poi delle seconde sono $-4b^2$, $-4b'^2$, . . . quantità reali essenzialmente negative; finalmente i quadrati delle due ultime specie di differenze sono per lo più espressioni immaginarie. Quindi deducesi che la equazione $Y=0$ dei quadrati delle differenze ha, generalmente parlando, tante radici reali negative, quanti sono i quadrati delle differenze tra due radici immaginarie coniugate della proposta $X=0$.

Sieno dunque $-r$, $-r'$, . . . queste radici negative dedotte o col metodo delle radici razionali, o con quello delle irrazionali; avremo

$$4b^2=r,\ 4b'^2=r',\ \ldots\ldots$$

donde

$$b=\pm\frac{1}{2}\sqrt{r},\ b'=\pm\frac{1}{2}\sqrt{r'},\ \ldots$$

Per conoscere adesso i corrispondenti valori di a, a', ... si sostituiscano $\pm\frac{1}{2}\sqrt{r}$, $\pm\frac{1}{2}\sqrt{r'}$, . . . in luogo di b successivamente nelle equazioni $M=0, N=0$ stabilite nel numero precedente; esse (164) acquisteranno in ciascuna sostituzione un divisore comune in a, il quale posto $=0$, darà i valori di a, a',... Per verità questo metodo cade in difetto allorchè qualcheduna delle radici reali della proposta pareggia la parte reale di una qualche radice immaginaria della medesima; imperocchè nel caso per esempio di $\alpha=a$, le due differenze $\alpha-(a+b\sqrt{-1})$, $\alpha-(a-b\sqrt{-1})$ riduconsi a $-b\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, delle quali i quadrati sono uguali fra loro ed $=-b^2$. È ancora in difetto il metodo quantunque volte le due parti reali di due radici immaginarie non coniugate della proposta sono fra loro uguali; infatti se, per esempio, $a=a'$, le differenze $a-a'+(b-b')\sqrt{-1}$, $a-a'-(b-b')\sqrt{-1}$ riducendosi rispettivamente a $(b-b')\sqrt{-1}$, $-(b-b')\sqrt{-1}$, avranno i quadrati uguali fra loro, ed $=-(b-b')^2$. In siffatte supposizioni dovrà dunque la equazione $Y=0$ dei quadrati delle differenze contenere un numero di radici negative maggiore del numero dei quadrati delle differenze tra due radici immaginarie coniugate della proposta $X=0$.

È però sempre possibile riconoscere se una radice negativa $-\rho$ della equazione dei quadrati delle differenze sia il quadrato della differenza fra due radici immaginarie coniugate della proposta; poichè, sostituendo $\frac{1}{2}\sqrt{\rho}$ in luogo di b nelle quantità M ed N, queste, nel caso che $-\rho$ non esprimesse il quadrato

della differenza fra due radici immaginarie coniugate della proposta, non conterrebbero alcun divisore comune in a.

232. Si vogliano trovare le radici della equazione

$$x^3-2x-5=0.$$

Una di queste radici è reale e positiva, avendo la equazione l'ultimo suo termine negativo; le altre due sono immaginarie, perchè la equazione dei quadrati delle differenze fra le radici della proposta, cioè (225. 1.°)

$$y^3-12y^2+36y+643=0,$$

ha per lo meno una radice reale negativa (185). Applicando alla radice positiva il metodo di Lagrange, si troverà dopo cinque trasformazioni successive $x=2,0945$ differente dal vero per meno di $0,0001$. Le radici poi immaginarie si troveranno nel modo seguente. Pongasi nella equazione dei quadrati delle differenze $y=-t$; si avrà la trasformata

$$t^3+12t^2+36t-643=0:$$

questa conterrà senza dubbio una radice reale positiva, la quale, sostituendo in luogo di t i numeri 0, 1, 2, 3, . . . , si troverà compresa fra 5 e 6. Facendo $t=5+\frac{1}{t_1}$, ne verrà la equazione

$$38t_1^3-231t_1^2-27t_1-1=0,$$

e il valore di t_1 più grande di 1 si troverà compreso fra 6 e 7. Si faccia $t_1=6+\frac{1}{t_2}$, e continuando nella medesima guisa le trasformazioni, otterremo i seguenti valori convergenti verso la cercata radice

$$\frac{5}{1},$$

$$5+\frac{1}{6}=\frac{31}{6},$$

$$5+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{5}}=\frac{160}{31},$$

$$5+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6}}}=\frac{991}{192},$$

ec. . . . .

Conosciuta t, se la radice immaginaria della proposta suppongasi uguale ad $a+b\sqrt{-1}$, sarà $b=\frac{1}{2}\sqrt{t}$. Sostituendo ora $a+b\sqrt{-1}$ nella proposta in luogo di x si otterranno le equazioni

$$M=a^3-(3b^2+2)a-5=0\,,\ N=3a^2-b^2-2=0\,,$$

le quali, ove facciasi $b=\frac{1}{2}\sqrt{t}$, dovendo aver luogo insieme, avranno (164) per conseguenza un divisore comune in a. Si cerchi il loro massimo comun divisore, e la operazione si continui fino al residuo $-(8b^2+4)a-15$ ove ritrovasi la sola prima potenza di a, e questo residuo posto $=0$ ci darà $a=\frac{-15}{4(2b^2+1)}$. Avremo così anche il valore di a, e quindi quello delle radici immaginarie $a+b\sqrt{-1}$, $a-b\sqrt{-1}$.

233. Se tutti i valori di b sono disuguali, a ciascun valore di b corrisponderà un valore di a: e perciò le equazioni $M=0$, $N=0$ avranno in questo caso una sola radice comune, ossia il loro comune divisore sarà di primo grado. La divisione adunque si deve allora continuare finchè si giunga al residuo in cui a abbia un solo grado, e questo residuo posto $=0$ ci darà il cercato valore di a. Ma se due valori di b sono uguali, come a questi valori uguali possono benissimo corrispondere due valori diversi di a, conviene allora protrarre la operazione fino ad un residuo di secondo grado per rapporto ad a, il quale posto $=0$ ci darà i due cercati valori di a. Si deve tenere una regola somigliante se i valori di b sono in maggior numero.

CAPO XV.

DEL TEOREMA DI STURM.

234. Si abbia la equazione numerica

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+\ .\ .\ .\ +T=0\,,$$

nella quale A, B, C, . . . , T sieno reali, e le sue radici tutte disuguali fra loro. Rappresentando con X il primo membro, dicasi X_1 il polinomio

$$mx^{m-1}+(m-1)Ax^{m-2}+(m-2)Bx^{m-3}+(m-3)Cx^{m-4}+\ .\ .\ .\ +S.$$

Ai due polinomii X, X_1 si applichi la operazione del massimo comune divisore con l'avvertenza di mutare il segno del residuo che si ottiene in ciascuna divisione, e di prendere questo residuo in tal guisa modificato per divisore della se-

guente divisione. Esprimano X_2, X_3, X_4, ... , X_r i residui presi con i segni contrarii, e Q_1, Q_2, Q_3, ... , Q_{r-1} i rispettivi quozienti; avremo

$$X = X_1 Q_1 - X_2 \,,$$
$$X_1 = X_2 Q_2 - X_3 \,,$$
$$X_2 = X_3 Q_3 - X_4 \,,$$
$$\vdots$$
$$X_{r-2} = X_{r-1} Q_{r-1} - X_r \,;$$

in cui X_r resto della divisione ultima, è necessariamente un numero positivo o negativo indipendente da x e differente da zero. Perocchè si è supposto che la equazione $X=0$ non contenga radici uguali: or questa supposizione non potrebbe aver luogo se si avesse $X_r=0$, perchè in tal caso il residuo precedente X_{r-1} sarebbe (93) un fattore comune ad X ed X_1; cioè le due equazioni $X=0$, $X_1=0$ ammetterebbero radici uguali, e per conseguenza (191) la equazione $X=0$ non avrebbe tutte le sue radici fra loro disuguali.

Posto ciò, *in luogo di* x *nelle quantità* X, X_1, X_2, . . . , X_r *si sostituiscano successivamente i numeri* h *e* k *positivi o negativi; se* $h<k$, *sarà il numero delle radici reali della proposta* X=0 *comprese fra* h *e* k *uguale all'eccesso del numero delle variazioni contenute nella serie dei segni dei polinomii* X, X_1, X_2, . . . X_r *per* x=h *sopra il numero delle variazioni contenute nella serie dei segni dei medesimi polinomii per* x=k.

Questo è il celebratissimo teorema di Sturm. Questo Geometra assai famoso per le sue scientifiche invenzioni comunicò nel 1829 all' Istituto di Francia una Memoria che conteneva un tal teorema, per mezzo del quale, come faremo in seguito osservare, si potrà sempre e con agevolezza conoscere il numero delle radici reali di una equazione qualunque, ed insieme determinare tutte le coppie di quei numeri interi i quali, differendo di una unità, comprendono una o più di siffatte radici.

235. La dimostrazione del teorema di Sturm poggia sopra parecchi principii, dei quali intendiamo in questo luogo di fare rilevare la verità.

1.° Sia α una radice reale della proposta $X=0$; mettendo $\alpha+u$ in luogo di x in X, si ottiene (174) un risultato della seguente forma

$$A'+B'u+C'u^2+D'u^3+\;.\;.\;.\;+u^m,$$

nel quale A' è ciò che diventa X, allorchè in esso si pone $x=\alpha$, e B', C', D',... esprimono polinomii derivati da A' secondo la legge indicata nei numeri 174 e 216. Ma per supposizione α è radice della proposta $X=0$; sarà perciò $A'=0$, e quindi la precedente formola si ridurrà ad

$$u(B'+C'u+D'u^2+\;.\;.\;.\;.\;+u^{m-1}).$$

Ora io dico *potersi sempre assegnare ad* u *un valor tale che si abbia la quantità tra parentesi affetta dal medesimo segno dal quale è affetto il primo suo termine* B', il quale per altro differisce da zero perchè la equazione

$X=0$ non ha radici uguali. Infatti essendo i coefficienti C', D', ..., 1 quantità finite di segno qualunque, consideriamo il caso più svantaggioso che è quello, nel quale si suppone che tutti abbiano il medesimo segno e sieno uguali al maggiore di essi dinotato da M'. Ponendo

$$B'>M'u+M'u^2+\ .\ .\ .\ +M'u^{m-1},$$

poichè si ha

$$M'u+M'u^2+\ldots+M'u^{m-1}=M'u(1+u+\ldots+u^{m-2})=\frac{M'u(1-u^{m-1})}{1-u},$$

sarà

$$B'>\frac{M'u(1-u^{m-1})}{1-u}.$$

Ma la quantità $\frac{M'u(1-u^{m-1})}{1-u}=\frac{M'u}{1-u}-\frac{M'u^m}{1-u}$ è minore di $\frac{M'u}{1-u}$ quando $u<1$; facendo dunque $B'=\frac{M'u}{1-u}$ siccome se ne ricava $u=\frac{B'}{M'+B'}<1$, questo valore di u, e qualunque altro più piccolo renderà B' maggiore della somma $M'u+M'u^2+\ .\ .\ .\ +M'u^{m-1}$, per cui sarà a più forte ragione $B'>C'u+D'u^2+\ .\ .\ .\ +u^{m-1}$, e per conseguenza dal segno di B' dipenderà il segno di $B'+C'u+D'u^2+\ .\ .\ .\ +u^{m-1}$.

2.° *Sostituendo ad* x *nei polinomii* X, X_1, X_2, X_3, . . . , X_r *un numero qualunque* α, *non mai avverrà che due polinomii successivi diventino per siffatta sostituzione uguali a zero.* Sieno infatti

$$X_{n-1},\ X_n\ ,\ X_{n+1}$$

tre polinomii successivi qualunque; avremo (234)

$$X_{n-1}=X_n\,Q_n-X_{n+1}\ ,$$

e quindi supponendo per poco che, per $x=\alpha$, si abbiano insieme $X_{n-1}=0$, $X_n=0$, risulterà eziandio $X_{n+1}=0$: ma

$$X_n=X_{n+1}Q_{n+1}-X_{n+2}\ ;$$

sarà dunque ancora $X_{n+2}=0$; e così di seguito ragionando si giugnerebbe a dimostrare $X_r=0$, lo che si è sopra dimostrato impossibile nella supposizione che la proposta $X=0$ non contenga radici uguali.

3.° La medesima relazione

$$X_{n-1}=X_n\,Q_n-X_{n+1}$$

c' insegna che *nel caso di* $X_n=0$ *per un particolare valore di* $x=\alpha$, *i due polinomii* X_{n-1}, X_{n+1}, *tra i quali si contiene il polinomio* X_n, *per lo stesso valore di* $x=\alpha$ *sono necessariamente affetti da segni contrarii.*

236. Posti questi principii, rappresentiamo non h una quantità positiva o negativa, ma però minore, cioè più prossima all' infinito negativo, di tutte le

radici reali delle equazioni

$$X=0\,,\ X_1=0\,,\ X_2=0\,,\ \ldots,\ X_{r-1}=0\,,$$

e supponiamo che facendo crescere x in una maniera continua, cominciando da h, si sostituiscano tutti i suoi valori successivi nei polinomii $X, X_1, X_2, \ldots, X_{r-1}$. È evidente che le variazioni e le successioni dei segni di questi polinomii e di X_r, che sappiamo essere costante, si riprodurranno tutte col medesimo ordine, finchè x non avrà preso un valore da rendere nullo qualcheduno dei succennati polinomii. Infatti perchè il numero ovvero l'ordine di siffatte variazioni e successioni venga a modificarsi, fa d'uopo che qualche polinomio, X_n per esempio, muti il segno, e per conseguenza che X_n quantità intera per rispetto ad x, sia divenuto prima nullo.

Supponiamo ora che un valore α di x renda nullo uno o più polinomii, e vediamo ciò che ne segue. Due casi possono darsi: o $x=\alpha$ rende nullo uno o più polinomii intermedii $X_1, X_2, \ldots, X_{r-1}$ senza fare svanire X, ovvero $x=\alpha$ rende nullo X, potendo d'altronde rendere ancora nullo uno o più polinomii intermedii. Nel primo caso, niuna variazione sparirà nel passare che fa x per i tre stati successivi $\alpha-u$, α, $\alpha+u$ (u dinota l'intervallo delle sostituzioni successive); nel secondo non isparirà che una sola variazione, ove pure suppongasi u sufficientemente piccolo.

Consideriamo il primo caso, quello cioè in cui il polinomio, X_n per esempio, diventa nullo per $x=\alpha$ senza che lo sia al tempo stesso il polinomio X. Per lo stesso valore di $x=\alpha$ i polinomii X_{n-1}, X_{n+1} non sono (235.2.°) nulli, che anzi esprimono essi quantità affette da segni contrarii (235.3.°); quindi conseguita che i tre polinomii consecutivi X_{n-1}, X_n, X_{n+1} per $x=\alpha$ formeranno quanto ai segni una delle due seguenti combinazioni

$$+\ 0\ -,\ \text{ovvero}\ -\ 0\ +.$$

Onde o si consideri il 0 affetto dal segno $+$ ovvero affetto dal segno $-$, si vede che ne risulta sempre una variazione ed una successione. D'altronde ciascuno dei polinomii X_{n-1}, X_{n+1} ha dovuto conservare il medesimo segno per tutti i valori di x compresi fra $x=h$ ed $x=\alpha$; dippiù essi neppure muteranno questo segno nel passaggio di $x=\alpha$ ad $x=\alpha+u$, prendendo u talmente piccolo che niuna radice di $X_{n-1}=0$, e di $X_{n+1}=0$ venga compresa fra α ed $\alpha+u$. Potrà dunque affermarsi che i tre polinomii X_{n-1}, X_n, X_{n+1}, i quali per $x=\alpha$ presentano una variazione ed una successione, danno ugualmente una variazione ed una successione per tutti i valori di x compresi fra $x=h$ ed $x=\alpha+u$. In tal guisa resta dimostrato che la supposizione di $x=\alpha$ nella serie dei polinomii $X, X_1, X_2, \ldots, X_{r-1}$ non farà perdere nè acquistare variazione alcuna.

Passiamo ora al secondo caso in cui X diventa nullo allorchè $x=\alpha$. Ponendo $x=\alpha+u$ nei polinomii X, X_1, chiamiamo U, U_1 ciò che essi diventano per questa sostituzione. Se A', B', C', ... rappresentino i risultati della sostituzione di α in luogo di x nel polinomio X, e nei polinomii derivati da X secondo la nota legge (174), e A'_1, B'_1, C'_1, ... i risultati della sostituzione di α in luogo di x nel polinomio X_1, e nei polinomii derivati da X_1; avremo le due equazioni

$$U=A'+B'u+C'u^2+\ldots$$
$$U_1=A'_1+B'_1u+C'_1u^2+\ldots$$

Ora α per ipotesi è radice della equazione $X=0$, sarà quindi $A'=0$; dippiù le due quantità B' ed A'_1 esprimono entrambe il risultato della sostituzione di α in luogo di x nel polinomio X_1, e questo risultato differisce necessariamente da zero nella supposizione che la equazione $X=0$ non abbia radici uguali. Adunque le due equazioni precedenti si muteranno nelle seguenti altre

$$U=A'_1u+C'u^2+\ .\ .\ .$$

$$U_1=A'_1+B'_1u+C'_1u^2+\ .\ .\ .\ .\ ,$$

nelle quali i secondi membri saranno affetti da quei medesimi segni, da cui sono affetti i loro primi termini A'_1u, A'_1 allorchè si assegna (235. 1.°) alla indeterminata u un valore sufficientemente piccolo. Saranno quindi U ed U_1 affetti dal medesimo segno quando u è positivo, e da segni contrarii quando u è negativo. Donde conseguita che i segni dei due polinomii X, X_1 per $x=\alpha-u$ presentano una variazione, e per $x=\alpha+u$ una successione; per conseguenza nel passaggio di $x=\alpha-u$ ad $x=\alpha+u$ una variazione si muta in successione. La medesima conseguenza avrebbe eziandio luogo nella ipotesi che il valore di $x=\alpha$, il quale rende nullo X, annullasse ancora uno o più polinomii intermedii, poichè si è già dimostrato precedentemente che, annullandosi qualcheduno di questi polinomii, non per questo verrà a mutarsi il numero delle variazioni.

Pertanto se, cominciando da $\alpha+u$, si continui a far crescere x per gradi insensibili, l'attuale numero delle variazioni nella serie dei segni si manterrà costante finchè x non giunga ad aggnagliare una seconda radice della equazione $X=0$, nel qual caso un' altra variazione si muterà in successione; e così di seguito. Adunque, crescendo x da h fino a k, sarà il numero delle variazioni perdute uguale al numero delle radici reali della equazione $X=0$ comprese fra h e k, ciocchè dimostra ad evidenza il teorema enunciato sopra (234).

237. Cerchisi per esempio il numero delle radici reali della equazione

$$x^3-7x+7=0$$

comprese fra -4 e $+7$; sarà

$$X=x^3-7x+7\ ;$$

moltiplicando ciascun termine per l'esponente di x, e diminuendo di una unità questo esponente medesimo, avremo

$$X_1=3x^2-7\ ;$$

moltiplicando i termini di X per 3 onde evitare le frazioni nel dividere X per X_1, eseguendo questa divisione, mutando i segni del residuo, e togliendo il comune fattore 7, otterremo

$$X_2=2x-3\ ;$$

moltiplicando per 2 i termini di X_1, facendo la divisione di X_1 per X_2, moltiplicando i termini del residuo per 2, continuando a dividere, e mutando il segno all' ultimo residuo, ricaveremo

$$X_3=1.$$

Ponendo ora $x=-4$ nei quattro polinomii X, X_1, X_2, X_3, si avrà per la serie dei segni corrispondenti a questa sostituzione

$$- + - +;$$

e facendo $x=+7$, si avrà la serie

$$+ + + +.$$

La prima serie presenta tre variazioni, la seconda nessuna; dunque tra -4 e $+7$ vi sono comprese tre radici reali della proposta; e siccome non può essa averne più di tre, bisognerà conchiudere che la medesima ha tutte le sue radici reali.

238. Dal teorema dimostrato sopra (236) risulta la seguente regola da praticarsi ogni volta che si cerca il numero totale delle radici reali di una data equazione.

Avendo determinato (178) *i limiti superiori delle radici positive e negative della equazione, si procede sopra i polinomii* X, X_1, *come nella ricerca del massimo comun divisore con la modificazione indicata sopra* (234); *si otterrà in tal guisa la serie dei polinomii* X, X_1, X_2, ... X_r *i quali, generalmente parlando, saranno* $m+1$ *di numero se* m *esprime il grado della equazione. Si scrivono su di una medesima linea i segni dei risultati provenienti dalla sostituzione del limite superiore delle radici negative in ciascuno dei succennati polinomii, e su di una seconda linea i segni dei risultati della sostituzione del limite superiore delle radici positive nei medesimi polinomii; il segno di* X_r *resterà sempre lo stesso, essendo* X_r *indipendente da* x. *Notasi infine il numero delle variazioni nella prima serie dei segni, ed il numero delle variazioni nella seconda; la differenza tra questi due numeri indicherà il numero totale delle radici reali della proposta.*

Prima di passare alle applicazioni di questa regola; faremo notare le seguenti cose.

1.° Nella ricerca dei polinomii X, X_1, X_2, ... , X_r si possono introdurre o anche sopprimere dei fattori numerici (96), purchè sieno positivi; fa d'uopo però attendere molto a non fare, riguardo ai segni, altre mutazioni che le sole indicate nel numero 234, poichè dalla considerazione dei segni, dai quali sono affetti i polinomii X, X_1, X_2, . . . dipende principalmente il metodo di Sturm.

2.° Quantunque volte vogliamo semplicemente conoscere il numero totale delle radici reali di una proposta equazione, potremo restarci dal calcolare i limiti superiori delle sue radici negative e positive, bastando il sostituire nei primi termini di ciascuno dei polinomii X, X_1, X_2, . . . $-\infty$ e $+\infty$ (∞ è il segno dell'infinito); imperocchè è chiaro da una parte che il segno di tutto il polinomio sarà in tal caso uguale al segno del suo primo termine, e d'altronde $-\infty$ e $+\infty$ esprimono i limiti superiori delle radici negative e positive di qualsivoglia equazione. Che anzi facendo uso del metodo di Sturm, in niun caso fa bisogno calcolare da principio i limiti superiori delle radici negative e positive della data equazione; poichè conoscendo il numero totale delle radici reali della equazione, si determinerà subito il luogo delle medesime sostituendo successiva-

mente nei polinomii X, X_1, X_2, . . . prima i numeri 0, 1, 2, 3, . . . e poi gli altri -1, -2, -3, ... Infatti giunto che siasi ad ottenere con la sostituzione dei numeri 0, 1, 2, 3, . . . una serie di segni, la quale presenti tante variazioni quante se ne ottengono con la sostituzione di $+\infty$, si potrà a ragione conchiudere non esservi altra radice al di là del numero ultimamente sostituito; l' istesso si dirà per rapporto ai numeri -1, -2, -3, . . .

3.° Allorchè cercasi il numero delle radici comprese fra i numeri h e k, potrà alcuna volta avvenire che h ovvero k annulli qualchedano dei polinomii X, X_1, X_2, . . . In tal caso se il polinomio che diviene nullo è uno degl' intermedii, X_n per esempio, non fa d' uopo nella serie dei segni tener conto del risultato 0; imperocchè i due polinomii X_{n-1}, X_{n+1} per lo stesso valore di x uguale ad h ovvero a k, offrono una variazione (235.3.°); d' altronde la combinazione del doppio segno $\pm$, dal quale si concepisce affetto il 0, con i segni $+-$ ovvero $-+$ produce eziandio una variazione; il numero dunque delle variazioni non verrà in modo alcuno alterato omettendo il risultato 0. Che se pel particolare valore di x uguale ad h ovvero a k rendesi nullo il polinomio X, si conchiuderà primieramente essere h ovvero k una radice della equazione $X=0$, e quindi si noteranno le variazioni cominciando dal polinomio X_1.

4.° Dopo di avere ottenuto i polinomii X, X_1, X_2, . . . , ove si scorga che uno degl' intermedii, X_n per esempio, sia di tal natura da ritenere costantemente il medesimo segno per tutti i valori compresi fra h e k, riuscirà inutile il sostituire siffatti valori nei seguenti polinomii X_{n+1}, X_{n+2}, . . . Imperocchè in tal caso è il numero delle radici reali comprese tra h e k uguale alla differenza tra il numero delle variazioni dei segni dei soli polinomii X, X_1, X_2, . . . , X_n per $x=h$, ed il numero delle variazioni dei segni dei medesimi polinomii per $x=k$. Per convincersene basterà applicare ai polinomii X, X_1, X_2, . . . , X_n ciò che è detto (236) per rapporto a tutti i polinomii. La serie dei segni fino al segno di X_n inclusivamente perdendo una variazione per ciascuna delle radici di $X=0$, ed il numero delle variazioni non venendo in alcun modo alterato per l' annullamento di qualchedano dei polinomii X_1, X_2, . . . , X_{n-1}: essendo d' altronde il segno di X_n costantemente lo stesso per supposizione; sarà necessariamente il numero delle variazioni perdute nella serie dei segni dei polinomii X, X_1, X_2, . . . , X_n allorchè da $x=h$ si passa ad $x=k$, uguale al numero delle radici reali di $X=0$ comprese fra h, e k. Se dunque nel corso delle divisioni necessarie per la determinazione dei polinomii X, X_1, X_2, . . . uno se ne incontri, X_n per esempio, di tal che sia $X_n=0$ una equazione la quale abbia tutte le sue radici immaginarie, non potendo in questa ipotesi X_n mutare il segno per qualsivoglia valore che si dia ad x (169), potremo restarci dal determinare i seguenti polinomii X_{n+1}, X_{n+2}, . . . Questo caso merita tutta la nostra attenzione, giacchè in niun modo potrà dissimularsi che i calcoli relativi alla determinazione dei succennati polinomii riescano gravosi assai, specialmente allora quando si giugne agli ultimi, per cagione dei coefficienti numerici i quali diventano molto grandi.

239. Passiamo ora alle applicazioni di quanto è detto finora intorno al teorema di Sturm.

1.° Propongasi in primo luogo la equazione

$$8x^3-5x-1=0,$$

della quale si è già trattato sopra (227.2.°). Avremo

$$X=8x^3-6x-1\ ,$$

donde si dedurrà $X_1=24x^2-6$, ovvero, sopprimendo (238.1.°) il fattore 6,

$$X_1=4x^2-1.$$

Dividendo X per X_1 si ottiene per residuo $-4x-1$; e quindi sarà

$$X_2=4x+1.$$

Finalmente la divisione di X_1 per X_2 dà per residuo -3; per consegnenza avremo

$$X_3=+3.$$

Ora la sostituzione di $-\infty$ e $+\infty$ nei primi termini delle quantità X, X_1, X_2, X_3 dà luogo alle due seguenti serie di segni

$$\begin{array}{c} -\ +\ -\ +\ ,\\ +\ +\ +\ +\ , \end{array}$$

nella prima delle quali si contengono tre variazioni, e nella seconda tre successioni; adunque la proposta avrà le sue tre radici tutte reali. Inoltre, facendo nelle medesime quantità successivamente $x=-1$, 0, $+1$, si trova

$$\begin{array}{ll} \text{per } x=-1\ , & -\ +\ -\ +\ ,\\ \text{per } x=\ \ 0\ , & -\ -\ +\ +\ ,\\ \text{per } x=+1\ , & +\ +\ +\ +\ , \end{array}$$

donde si scorge che due delle tre succennate radici si comprendono fra 0 e -1, e la terza fra 0 e $+1$.

2.° Sia in secondo luogo la equazione

$$x^3-5x^2+8x-1=0.$$

Operando come nel precedente esempio, troveremo

$$X=x^3-5x^2+8x-1\ ,\ \ X_1=3x^2-10x+8,\ \ X_2=2x-31\ ,\ \ X_3=-2295.$$

Ciò posto, la sostituzione di $-\infty$ e $+\infty$ nei primi termini di queste quantità dà luogo alle due seguenti serie di segni

$$\begin{array}{c} -\ +\ -\ -,\\ +\ +\ +\ -, \end{array}$$

nella prima delle quali si osservano due variazioni e nella seconda se ne vede una sola; adunque la proposta ha una sola radice reale, la quale è positiva (183), e vien compresa fra 0 e $+1$.

3.° Proposta la equazione

$$x^4-2x^3-7x^2+10x+10=0\,,$$

si ottengono

$$X=x^4-2x^3-7x^2+10x+10\,,$$
$$X_1=2x^3-3x^2-7x+5\,,$$
$$X_2=17x^2-23x-45\,,$$
$$X_3=152x-305\,,$$
$$X_4=+524535.$$

Prendendo i segni dei primi termini prima nella ipotesi di $x=-\infty$, e poi nell'altra di $x=+\infty$, si hanno le due serie

$$+\ -\ +\ -\ +\ \ldots\ 4 \text{ variazioni}$$
$$+\ +\ +\ +\ +\ \ldots\ 0 \text{ variazioni};$$

per conseguenza le quattro radici della proposta sono tutte reali.

Dippiù si ha per

$$\begin{array}{ll} x=0\,, & +\ +\ -\ -\ +\ \ldots\ 2 \text{ variazioni} \\ x=1\,, & +\ -\ -\ -\ +\ \ldots\ 2 \\ x=2\,, & +\ -\ -\ -\ +\ \ldots\ 2 \\ x=3\,, & +\ +\ +\ +\ +\ \ldots\ 0\,; \end{array}$$

e per

$$\begin{array}{ll} x=0\,, & +\ +\ -\ -\ +\ \ldots\ 2 \text{ variazioni} \\ x=-1\,, & -\ +\ +\ -\ +\ \ldots\ 3 \\ x=-2\,, & -\ +\ +\ -\ +\ \ldots\ 3 \\ x=-3\,, & +\ -\ +\ -\ +\ \ldots\ 4\,; \end{array}$$

donde deducesi che la equazione ha due radici positive comprese fra 2 e 3 una negativa fra 0 e -1, ed un'altra negativa fra -2 e -3.

4.° Per la equazione

$$2x^4-13x^2+10x-19=0$$

i primi tre polinomii saranno

$$X=2x^4-13x^2+10x-19\,,$$
$$X_1=4x^3-13x+5\,,$$
$$X_2=13x^2-15x+38.$$

Ma essendo le radici della equazione $X_2=0$ immaginarie, X_2 conserverà lo stesso segno, qualunque sia x; ci arresteremo dunque ad X_2 e non considere-

remo (238.4.°) che i soli polinomii X, X_1, X_2. Ora per la sostituzione di $-\infty$ e $+\infty$ nei loro primi termini si hanno le due seguenti serie di segni

$$+ - + \ldots \quad 2 \text{ variazioni}$$
$$+ + + \ldots \quad 0 \text{ variazioni.}$$

Adunque la proposta non ha che due radici reali, delle quali una deve essere (183) positiva, e l'altra negativa (184).

Siffatti esempii sembrano sufficienti a dare una idea della importanza del teorema di Sturm, il quale potrebbe estendersi al caso ancora, in cui la equazione proposta ammettesse delle radici uguali; noi però mirando allo scopo prefisso a questi elementi non giudichiamo potere più a lungo intertenerci in altre ricerche riguardanti la risoluzione delle equazioni numeriche. Rimettiamo quindi i diligenti allievi alle opere classiche di Lagrange *traité de la résolution des équations numériques*, di Legendre *supplément a la théorie des nombres*, di Budan *nouvelle méthode pour résoudre les équations numériques*, e di Fourier *analyse des équations*.

CAPO XVI.

DELLE RAGIONI, PROPORZIONI, E PROGRESSIONI.

240. Il quoziente $a:b$ ovvero $\frac{a}{b}$ chiamasi alcuna volta *ragione geometrica* delle quantità a, b, e la differenza $a-b$ *ragione aritmetica* delle medesime quantità: a dicesi *antecedente* della ragione, b *conseguente*. Il valore della ragione geometrica non si muta (92) allorchè l'antecedente e il conseguente si moltiplicano o si dividono per la medesima quantità; nè può mutarsi il valore della ragione aritmetica se tanto l'antecedente che il conseguente si facciano crescere o diminuire ugualmente.

241. La uguaglianza di due ragioni

$$a:b=a':b', \quad a-b=a'-b'$$

dicesi *proporzione geometrica* o *aritmetica* secondo la qualità delle ragioni medesime. Le proporzioni dinotano che fra le due quantità a, b vi è quello stesso rapporto geometrico o aritmetico che fra le altre due a', b'; esse si leggono nella seguente maniera: a sta a b geometricamente o aritmeticamente come a' sta a b'. Le due quantità a, b' si chiamano *termini estremi* della proporzione, e le altre due b, a' diconsi *medii*.

242. Dinotino x, y due quantità variabili; se nel crescere o nel diminuire di siffatte quantità, il quoziente $x:y$ ovvero $\frac{x}{y}$ si rimane costantemente lo stes-

so, una dicesi essere *direttamente* come l'altra; che se il prodotto xy si rimanesse costante nel crescere o nel diminuire delle due quantità x, y, una direbbesi essere *inversamente* o *reciprocamente* come l'altra. Posto ciò, se nel primo caso si chiami q il quoziente costante, sarà $\frac{x}{y}=q$, e quindi $x=qy$; e se nel secondo caso si esprima con p il costante prodotto, sarà $xy=p$, donde $x=\frac{p}{y}$.

243. Dalla proporzione geometrica

$$a:b=a':b',\ \text{ovvero}\ \frac{a}{b}=\frac{a'}{b'},$$

ricaviamo $ab'=a'b$; e dalla proporzione aritmetica

$$a-b=a'-b'$$

risulta $a+b'=a'+b$. Quindi *nella proporzione geometrica il prodotto dei termini estremi agguaglia il prodotto dei medii, e nella proporzione aritmetica la somma degli estremi agguaglia quella dei termini medii.*

La proposizione inversa dimostrasi agevolmente, perchè dalle equazioni

$$ab'=a'b,\ a+b'=a'+b$$

immediatamente deduconsi le altre

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'},\ a-b=a'-b'.$$

Adunque *se i quattro termini* a, b, a', b' *sono tali, che il prodotto degli estremi uguagli quello dei medii, ovvero la somma degli uni uguagli quella degli altri; saranno essi proporzionali geometricamente nel primo caso, ed aritmeticamente nel secondo.*

244. Ponendo $a'=b$, perchè così il conseguente della prima ragione diventi lo stesso che l'antecedente della seconda ragione, la proporzione chiamasi *continua*, e si ha $b^2=ab'$, ovvero $2b=a+b'$. Quindi *nella proporzione continua, se geometrica, il prodotto dei termini estremi è uguale al quadrato del termine medio; se aritmetica, la somma dei termini estremi è uguale al doppio del termine medio.*

Dalle equazioni $b^2=ab'$, $2b=a+b'$ si ottengono $b=\sqrt{ab'}$, $b=\frac{a+b'}{2}$, ed è perciò che la quantità $\frac{a+b'}{2}$ dicesi *media proporzionale aritmetica* fra a e b', e la radice $\sqrt{ab'}$ *media proporzionale* geometrica fra a e b'.

245. Se nella proporzione

$$a:b=a':b'$$

i termini a, b, a', b' sono numeri interi, ma a, b primi fra loro, sarà

$$b'=nb\,,\ a'=na:$$

n esprime un qualunque numero intero.

Imperciocchè la proporzione suddetta equivale ad $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$, da cui ricavasi $\frac{ab'}{b}=a'$; ora il secondo membro di questa equazione essendo un numero intero, anche il primo membro dovrà essere un numero intero, e perciò b dividerà esattamente il prodotto ab'; ma b non può dividere a esattamente, perchè per ipotesi a, b sono primi fra loro; adunque b dividerà esattamente b', e per conseguenza $b'=nb$, e $a'=\frac{ab'}{b}=\frac{a.nb}{b}=na$.

246. Essendo $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$, avremo $\frac{a}{b}\pm h=\frac{a'}{b'}\pm h$, donde risulterà

$$\frac{a\pm hb}{b}=\frac{a'\pm hb'}{b'}.$$

Da questa equazione deducesi $\frac{b}{b'}=\frac{a\pm hb}{a'\pm hb'}$; ma $\frac{b}{b'}=\frac{a}{a'}$; dunque sarà $\frac{a}{a'}=\frac{a\pm hb}{a'\pm hb'}$, da cui immediatamente si dedurrà

$$\frac{a\pm hb}{a}=\frac{a'\pm hb'}{a'}.$$

La equazione poi $\frac{b}{b'}=\frac{a\pm hb}{a'\pm hb'}$ ci dà ancora $\frac{a+hb}{a'+hb'}=\frac{a-hb}{a'-hb'}$, donde si otterrà

$$\frac{a+hb}{a-hb}=\frac{a'+hb'}{a'-hb'}.$$

Dal detto conseguita che dalla proporzione

$$a:b=a':b'$$

si possono sempre dedurre le seguenti altre

$$a\pm hb:b=a'\pm hb':b',\ a\pm hb:a=a'\pm hb':a'$$

$$a+hb:a-hb=a'+hb':a'-hb',$$

le quali, ponendo $h=1$, si trasformano in

$$a\pm b:b=a'\pm b':b',\ a\pm b:a=a'\pm b':a'$$

$$a+b:a-b=a'+b'.a'-b'.$$

Quindi si rileva che *in ogni proporzione geometrica la somma ovvero la differenza dei termini della prima ragione sta al secondo o al primo, come la somma ovvero la differenza dei termini della seconda ragione sta al secondo o al primo;* e che *la somma dei termini della prima ragione sta alla loro differenza, come la somma dei termini della seconda ragione sta alla loro differenza.*

247. Supponendo

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\ldots=k,$$

si ottengono

$$a=bk,\ a'=b'k,\ a''=b''k,\ \ldots,$$

e conseguentemente

$$a+a'+a''+\ldots=k(b+b'+b''+\ldots);$$

donde

$$\frac{a+a'+a''+\ldots}{b+b'+b''+\ldots}=k=\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\ldots$$

Adunque *supposta la uguaglianza di più ragioni geometriche, starà la somma di tutti gli antecedenti alla somma di tutti i conseguenti, come qualunque antecedente al suo conseguente.*

248. Siccome dalle proporzioni

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'},\ \frac{c}{d}=\frac{c'}{d'},\ \frac{e}{f}=\frac{e'}{f'},\ \ldots$$

abbiamo

$$\frac{ace\ldots}{bdf\ldots}=\frac{a'c'e'\ldots}{b'd'f'\ldots},$$

perciò, *se i primi termini di più proporzioni geometriche si moltiplichino fra loro, come ancora i secondi, i terzi, ed i quarti; saranno i prodotti proporzionali.*

Lo stesso dicasi delle proporzioni aritmetiche, ove alla moltiplicazione dei termini si sostituisca la loro somma; perocchè dalle proporzioni

$$a-b=a'-b',\ c-d=c'-d',\ e-f=e'-f',\ \ldots$$

deducesi immediatamente

$$(a+c+e+\ldots)-(b+d+f+\ldots)=(a'+c'+e'+\ldots)-(b'+d'+f'+\ldots).$$

Le ragioni

$$ace\ldots : bdf\ldots,\ (a+c+e+\ldots)-(b+d+f+\ldots)$$

si chiamano *composte*, la prima dalle geometriche $a:b$, $c:d$, $e:f$, ..., la seconda dalle aritmetiche $a-b$, $c-d$, $e-f$, ...

249. Abbiamo generalmente

$$(ab+a'b'+a''b''+\ldots)^2+(ab'-a'b)^2+(ab''-a''b)^2+\ldots+(a'b''-a''b')^2+\ldots=$$
$$=(a^2+a'^2+a''^2+\ldots)(b^2+b'^2+b''^2+\ldots),$$

perchè sviluppando il primo membro, tutti i doppii prodotti si distruggeranno scambievolmente, e non rimarrà che la somma dei quadrati, a cui facilmente potrà darsi la forma del secondo membro. Ora supponendo che

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\ldots,$$

si avranno le seguenti relazioni

$$ab'=a'b\,,\ ab''=a''b\,,\ \ldots\ a'b''=a''b'\,,\ \ldots,$$

e quindi

$$ab'-a'b=0\,,\ ab''-a''b=0\,,\ \ldots,\ a'b''-a''b'=0\,,\ \ldots;$$

sarà dunque in questa stessa supposizione

$$(ab+a'b'+a''b''+\ldots)^2=(a^2+a'^2+a''^2+\ldots)(b^2+b'^2+b''^2+\ldots),$$

donde

$$\frac{a^2+a'^2+a''^2+\ldots}{ab+a'b'+a''b''+\ldots}=\frac{ab+a'b'+a''b''+\ldots}{b^2+b'^2+b''^2+\ldots}.$$

250. Sia

$$a:b=b:b'=b':b''=b'':b'''=\ldots=k:1$$

dove i termini a, b, b', b'', b''', ... si dicono costituire *una progressione geometrica*; avremo

$$a=bk\,,\ b=b'k\,,\ b'=b''k\,,\ b''=b'''k\,,\ \ldots$$

e perciò

$$b=\frac{a}{k}\,,\ b'=\frac{b}{k}=\frac{a}{k^2}\,,\ b''=\frac{b'}{k}=\frac{a}{k^3}\,,\ b'''=\frac{b''}{k}=\frac{a}{k^4}\,,\ \ldots.$$

Quindi si rileva che i primi n termini di qualsivoglia progressione geometrica, supponendo che il primo di tutti sia a e che k esprima il rapporto di uno qualunque di essi all'altro che immediatamente conseguita, potranno indicarsi come segue

$$a,\ \frac{a}{k},\ \frac{a}{k^2},\ \frac{a}{k^3},\ \frac{a}{k^4},\ \ldots,\ \frac{a}{k^{n-1}}.$$

Facciamo $\frac{1}{k}=\frac{b}{a}=q$, otterremo i medesimi n termini espressi ancora per

$$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3,\ aq^4,\ \ldots,\ aq^{n-1}.$$

Posto ciò, essendo

$$\frac{1-q^n}{1-q}=1+q+q^2+q^3+q^4+\ldots+q^{n-1},$$

sarà

$$\frac{a-aq^n}{1-q}=a+aq+aq^2+aq^3+aq^4+\ldots+aq^{n-1};$$

chiamando quindi s_n la somma dei primi n termini di una progressione geometrica qualunque, nella quale a sia il primo di tutti, e q il rapporto di uno qualunque di essi a quello che immediatamente il precede, si otterrà

$$s_n=\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}.$$

Questa formola potrà eziandio ottenersi col seguente discorso. Nella progressione geometrica

$$a:aq=aq:aq^2=aq^2:aq^3=aq^3:aq^4=\ldots=aq^{n-2}:aq^{n-1}$$

tutti i termini sono antecedenti fuorchè l' ultimo aq^{n-1}, e tutti sono conseguenti fuorchè il primo a; e però la somma di tutti gli antecedenti verrà espressa da s_n-aq^{n-1}, e la somma di tutti i conseguenti da s_n-a. Sarà dunque (247)

$$s_n-aq^{n-1}:s_n-a=a:aq,$$

donde si dedurrà (243)

$$aq(s_n-aq^{n-1})=a(s_n-a),$$

ovvero

$$qs_n-aq^n=s_n-a,$$

per cui si troverà

$$s_n=\frac{a-aq^n}{1-q}=\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}.$$

Avvertasi in questo luogo che crescendo n oltre qualunque dato numero quanto si voglia grande, supposto che si abbia $q<1$, la quantità $\frac{aq^n}{1-q}$ diminuirà per modo che sempre più si accosterà a zero; sarà dunque il polinomio $a+aq+aq^2+aq^3+aq^4+\ldots$ protratto all' infinito uguale soltanto ad $\frac{a}{1-q}$. Così per esempio se $a=1$, e $q=\frac{1}{2}$, risulterà

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

251. Nella formola

$$a-b=b-b'=b'-b''=b''-b'''=\ldots$$

i termini a, b, b', b'', b''', ... si dicono essere in *progressione aritmetica*.

Facciasi $a-b=\delta$; si avranno

$$b=a+\delta,\ b'=b+\delta=a+2\delta,\ b''=b'+\delta=a+3\delta,\ b'''=b''+\delta=a+4\delta,\ \ldots$$

Adunque i primi n termini di qualsivoglia progressione aritmetica, in cui a sia il primo di tutti, e δ la differenza fra due qualunque di essi, si potranno esprimere come segue

$$a,\ a+\delta,\ a+2\delta,\ a+3\delta,\ a+4\delta,\ \ldots,\ a+(n-2)\delta,\ a+(n-1)\delta;$$

e siccome si ha sempre la medesima somma $2a+(n-1)\delta$ o che il primo termine si aggiunga all' ultimo, o che il secondo si aggiunga al penultimo, ovvero che il terzo si aggiunga all' antipenultimo, ec..., perciò la somma s_n di questi primi n termini verrà espressa per

$$s_n = \frac{n}{2}(2a+(n-1)\delta).$$

La verità di questa espressione è evidente quando n è pari; allorchè n è dispari vi sarà un termine medio della forma $a+\frac{n-1}{2}\delta$, che aggiunto alla somma di tutti gli altri, la quale è $\frac{n-1}{2}(2a+(n-1)\delta)$, ci darà ancora

$$s_n = \frac{n-1}{2}(2a+(n-1)\delta)+a+\frac{n-1}{2}\delta = \frac{n}{2}(2a+(n-1)\delta).$$

Suppongasi per esempio $a=1$, $\delta=1$, $n=100$, avremo

$$1+2+3+4+\ldots+100=\frac{100}{2}(2+99)=50\times101=5050.$$

252. Dato il primo termine a, l'ultimo u, e il numero n dei termini di una progressione geometrica, o aritmetica, avendosi (250.251)

$$u=aq^{n-1},\ \text{ed}\ u=a+(n-1)\delta;$$

dalla prima di queste si dedurrà q, e dalla seconda δ, e quindi si otterranno eziandio tutti i termini di mezzo. Così per esempio mettendo $a=2$, $u=54$, $n=4$; sarà $54=2q^3$, cioè $27=q^3$, donde $q=3$, $aq=6$, $aq^2=18$, ... Similmente $54=2+3\delta$, cioè $52=3\delta$, donde $\delta=17\frac{1}{3}$, $a+\delta=19\frac{1}{3}$, $a+2\delta=$ $=36\frac{2}{3}$, ...

FINE DELL' ALGEBRA

LIBRO TERZO

GEOMETRIA

Non è alcuno per ventura, conoscitore delle moderne scienze matematiche, cui non debba sembrare troppo malagevole impresa ed ardua scrivere oggidì con gradimento universale de' dotti, elementi di Geometria. Perchè vi ha di quei, che dimentichi, o forse ancora invidiosi della grandezza in che son pur venute ai giorni nostri le matematiche discipline, si studiano a tutto potere tornarle in quello stato, se non umile, certamente meno specioso che avevano ai tempi del famoso Euclide. Però par loro un gran peccato discostarsi in Geometria anche per poco da quel greco geometra, nè possono tenersi dal condannare di solenne ignoranza chi ardisse nelle dimostrazioni geometriche seguire altra via che quella già segnata dagli antichi. Ma in ciò, se non la verità della cosa, di che io non voglio per ora farmi giudice, il rispetto almeno e la riverenza che pur si debbe a tanti rinomati geometri della nostra età, che diversa opinione portarono, basterebbe a rendere i soverchi amatori degli antichi più cauti e guardinghi nel parlare. Altri per l' opposito contendono ad ogni pruova che la Geometria non debba solamente restringersi al metodo insegnatone da Euclide: poter ben altri studiando nei più moderni geometri riuscir valentissimo quanto il fosse il più religioso seguace degli antichi: con ciò nulla derogarsi a quei grandi uomini ai quali tornerà sempre in onor singolarissimo l' essere stati essi i primi ritrovatori di questa scienza benchè oggigiorno, mercè i continui avanzamenti della medesima, non ne sieno i soli maestri. Or se con l' una parte o con l' altra debba tenersi in tal quistione, troppo di noi presumeremmo a volerlo francamente decidere, specialmente avendo a fronte sì ragguardevoli avversarii: oltrechè quanto è al disegno che abbiamo avuto nel comporre questa opera, poco rilieva il sentenziare da giudice. Imperciocchè per conto della utilità dei nostri giovani, cui solamente intendiamo dirigere questo lavoro, abbiamo amato meglio trascegliere e dagli antichi e dai moderni il più acconcio alla loro capacità, che tenendo dietro ad un solo metterci a pericolo di correr insieme con le virtù anche i vizii. Laonde ci siamo studiati di radunare in uno definizioni le più esatte, e dimostrazioni che fossero ad un tempo eleganti, facili, e brevi. E però in questi elementi di Geometria molte volte lasciato Euclide abbiam seguito le orme del Legendre, del La-Croix, del Vincent, del Francoeur, del Caraffa,

ed ancora di parecchi celebri nostri concittadini: la qual cosa se mai vi fosse per ventura chi tratto da smania più che da giusto amor degli antichi volesse recarci a biasimo, noi non istaremmo a piatir con lui, avendo a nostro favore il giudicio dei primi geometri non men d' Italia che d' Europa tutta.

CAPO I.

DEFINIZIONI E NOZIONI PRELIMINARI.

253. La *linea* è nella estensione una lunghezza priva di larghezza.

I termini ovvero i limiti della linea diconsi *punti*. Il punto adunque non ha grandezza alcuna nella estensione.

La *linea retta* è quella che segna il più corto cammino da un punto ad un altro. Da un punto ad un altro possono condursi infinite linee di diversa lunghezza, quella che è la più breve di tutte queste linee dicesi retta. La linea retta si definisce da Euclide essere *quella che si distende ugualmente fra i suoi punti*; quella cioè in cui niun punto intermedio s' innalza o si abbassa dagli estremi, ovvero a destra si piega o a sinistra. Da siffatte definizioni della linea retta agevolmente comprendesi non potersi da un punto ad un altro condurre che una sola retta.

Si chiama *curva* qualunque altra linea che non sia retta nè composta di linee rette.

254. La *superficie* nella estensione è ciò che ha lunghezza e larghezza senza profondità o grossezza. I termini della superficie sono le linee.

Quella superficie, nella quale prendendo ad arbitrio due punti, la retta che congiunge questi punti giace tutta intera in essa, si appella *superficie piana*, o solamente *piano*.

Qualunque altra superficie che non sia piana nè composta di superficie piane si chiama *curva*.

255. *Solido* si chiama ciò che riunisce in se le tre dimensioni della estensione, cioè lunghezza, larghezza, e profondità ovvero grossezza.

Nella sentenza di quelli che affermano continua essere la estensione dei corpi, le superficie, le linee, ed i punti non sono semplici invenzioni del nostro intelletto, ma reali affezioni dei corpi. Siffatte affezioni non possono al certo separarsi dai subbietti, nei quali si trovano; non può cioè esistere separatamente dal corpo la superficie qual velo privo affatto di grossezza, la linea qual filo del tutto scevero di grossezza e di larghezza, il punto qual granello privo di ogni estensione; ciò non ostante sarà sempre la superficie il termine reale del solido che per se esiste, la linea il termine reale della superficie, ed il punto il termine reale della linea.

Pertanto la grandezza continua dicesi quella, nella quale le parti che immediatamente succedonsi hanno il medesimo limite.

256. Allorchè due rette AB, AC (*fig. 1.ª*) s'incontrano in un punto A, la inclinazione di una di esse per esempio AC all' altra AB, dicesi *angolo*. Il punto A di concorso appellasi *vertice* dell' angolo, e le rette AB, AC si chiamano *lati* dell' angolo.

L' angolo s' indica o con la sola lettera A del vertice, ovvero con le tre CAB avvertendo sempre di porre in mezzo la lettera del vertice.

L'angolo non varia allorchè i suoi lati si prolungano ovvero si accorciano, ma varia solo quando questi medesimi lati si rendono più o meno differenti fra loro in direzione; dapoichè in questo secondo caso solamente mutasi la inclinazione che tra loro hanno i lati, nella quale inclinazione propriamente consiste la natura dell'angolo. Così l'angolo BAC (*fig.* 2.ª) aumenterebbe successivamente se il lato AB prendesse le direzioni AB', AB'', AB''', ec.

È chiaro potersi concepire due angoli uguali soprapposti l'uno all'altro in guisa che il vertice ed i lati del primo combacino col vertice e con i lati del secondo. È chiaro inoltre essere gli angoli suscettibili di addizione e di sottrazione, di moltiplicazione e di divisione: così l'angolo BAC (*fig.* 3.ª) agguaglia la somma degli angoli BAD e DAC, e perciò si può scrivere

$$BAC=BAD+DAC;$$

così pure l'angolo BAD è la differenza degli angoli BAC e DAC, e quindi può scriversi

$$BAD=BAC-DAC.$$

257. La linea retta AB (*fig.* 4.ª) incontri l'altra CD nel punto B in modo che gli angoli *adiacenti* ABD, ABC risultino uguali fra loro; ciascuno di questi due angoli dicesi *angolo retto*, e la retta AB *perpendicolare* alla retta CD nel punto B.

Ora è chiaro che *tutti gli angoli retti sono uguali fra loro*; supponendo cioè AB (*fig.* 5.ª) perpendicolare alla retta CD, ed EF perpendicolare alla HG, saranno uguali fra loro gli angoli ABD, EFG. Infatti prendendo $BC=BD=FH=FG$, sarà $CD=HG$; adattando poi la HG sopra la CD in modo che il punto H cada sul punto C, e il punto G sul punto D, tutta la HG coinciderà con tutta la CD, perchè altrimenti da C a D si potrebbero condurre due linee rette, la qual cosa è impossibile (253); quindi conseguita che il punto F medio della retta HG cadrà sul punto B medio della CD, e perciò il lato FG coinciderà col lato BD. Posto ciò, io dico che il lato FG essendo in tal guisa applicato sopra BD, anche il lato FE cadrà sul lato BA; poichè supponendo per un tantino che FE non cada sopra BA, ma sopra un'altra retta BK, dovendo essere, per ciò che si è supposto sopra, l'angolo $EFG=EFH$, dovrebbe ancora essere $KBD=KBC$. Ma essendo l'angolo $KBD<ABD$ e $KBC>ABC$, e d'altronde avendosi per supposizione $ABD=ABC$, devè essere $KBD<KBC$. Donde conseguita che il lato FE non può cadere sopra un'altra retta differente dal lato BA, cadrà perciò sopra BA. Adunque il vertice ed i lati dell'angolo EFG combaceranno con il vertice e con i lati dell'angolo ABD; sarà quindi l'angolo $ABD=EFG$.

Angolo ottuso chiamasi quello che è maggiore del retto, *angolo acuto* quello che è minore del retto.

258. *Linee rette parallele* diconsi quelle che, essendo in un medesimo piano, prolungate all'infinito dall'una parte e dall'altra, non mai s'incontrano.

259. Allorchè due rette AB, CD (*fig.* 6.ª) vengono secate da una terza retta EF, gli angoli BGH, DHG, come ancora gli angoli AGH, CHG diconsi *interni dalla medesima parte*: gli angoli AGH, GHD, come pure gli angoli

BGH, *GHC* sono chiamati ***alterni—interni***, o semplicemente ***alterni***: gli angoli *EGB*, *GHD* si dicono ***interni—esterni***, e così pure si chiamano gli angoli *EGA*, *GHC*: gli angoli *EGB*, *CHF*, come pure gli angoli *EGA*, *DHF* si nominano ***alterni—esterni***: finalmente gli angoli *EGB*, *DHF*, come ancora gli angoli *EGA*, *CHF* si appellano ***esterni dalla medesima parte.***

Nel punto *E* (*fig. 7.ª*), dove due rette *AB*, *CD* si tagliano, formansi sempre quattro angoli *AEC*, *CEB*, *BED*, *DEA*, il primo ed il terzo dei quali, come ancora il secondo ed il quarto diconsi ***opposti al vertice.***

260. ***Figura piana*** è un piano terminato per ogni parte da linee. Se queste linee sono tutte rette, la figura dicesi ***figura rettilinea***, ovvero ***poligono.*** Il contorno del poligono, la somma cioè di tutte le rette che lo terminano, vien detta ***perimetro*** del poligono.

Il più semplice poligono, quello cioè che vien terminato da tre linee rette ossia ***lati***, si nomina ***triangolo.*** Il triangolo è ***equilatero*** se ha tutti i tre lati uguali, ***isoscele*** se ha solamente due lati uguali, ***scaleno*** se ha tutti i tre lati disuguali.

Dippiù il triangolo dicesi ***rettangolo*** se contiene un angolo retto, ***ottusangolo*** se contiene un angolo ottuso, ed ***acutangolo*** se tutti e tre gli angoli sono acuti. Nel triangolo rettangolo il lato opposto all' angolo retto chiamasi ***ipotenusa***, e gli altri due lati diconsi ***cateti.***

In ogni triangolo uno qualunque dei suoi tre lati è minore della somma degli altri due. Ciò rendesi evidente dalla sola definizione della linea retta; imperocchè la retta *AB* (*fig. 8.ª*) segna (253) il più corto cammino dal punto *A* al punto *B*. Adunque nel triangolo *ABC* deve essere

$$AB < AC + CB.$$

Il vertice *C* di uno qualunque degli angoli del triangolo *ABC*, è il ***vertice*** del triangolo, e la ***base*** *AB* è il lato opposto; nel triangolo isoscele però più particolarmente si suole prendere per base il lato opposto all' angolo compreso fra i due lati uguali.

261. Fra i poligoni quadrilateri appellasi ***quadrato*** quello che ha tutti i suoi lati uguali, e tutti gli angoli retti: ***rettangolo*** quello che ha solamente tutti gli angoli retti: ***losanga*** o ***rombo*** quello che ha solamente tutti i suoi lati uguali: ***parallelogrammo*** o ***romboide*** quello che ha i lati opposti paralleli: ***trapezio*** quello che ha due soli lati paralleli.

I poligoni terminati da cinque lati, si appellano ***pentagoni;*** quelli che sono terminati da sei lati, ***esagoni;*** ec.

Quelle rette che attreversano un poligono da un angolo all' altro, diconsi ***diagonali.***

I poligoni si chiamano ***equilateri*** se tutti i loro lati sono uguali, ***equiangoli*** se tutti gli angoli sono uguali.

262. Il ***cerchio*** è una figura piana terminata da una linea curva, la quale ha tutti i suoi punti ugualmente distanti da un punto medio. Questo punto dicesi ***centro***, e la curva che termina il cerchio vien detta ***circonferenza*** o ***periferia*** del cerchio. Ciascuna delle rette *CA*, *CB*, *CD*, *CE*, ... (*fig. 9.ª*) che dal centro *C* del cerchio si conduce alla sua circonferenza, si chiama ***raggio.***

Qualunque retta *AE* che passa pel centro *C* e dall' una e dall' altra parte è terminata dalla circonferenza, si nomina ***diametro.***

Dalla definizione del cerchio chiaramente rilevasi, tutti i raggi essere fra loro uguali, e tutti i diametri essere eziandio uguali fra loro, ed uguali al doppio del raggio.

Ogni diametro divide il cerchio e la sua circonferenza in due parti uguali. Infatti ove si concepisca la figura $ACEg'A$ soprapporsi all'altra $ACEgA$ in modo che si conservi la comune loro base AE, la linea curva $Ag'E$ dovrà concepirsi coincidere esattamente con la linea curva AgE; perocchè tutti i punti di queste due linee debbono ugualmente distare dal centro.

263. Chiamasi *arco* una porzione qualunque della circonferenza, e la linea retta che ne unisce le due estremità si dice *corda* del medesimo arco: nella succennata figura 9.ª FG è la corda dell' arco $Fg'G$.

Nel medesimo cerchio una corda qualunque è minore del diametro. Conducendo infatti dal centro C (*fig. 10.ª*) alle estremità A e B della corda AB i raggi CA e CB, sarà (260) $AB<AC+CB$, cioè (262) $AB<2AC(=AD)$.

264. *Segmento di cerchio* appellasi quella superficie che è compresa fra l' arco, e la corda; e *settore di cerchio* quella che è terminata dall'arco, e da due raggi: nella figura 9.ª la superficie $FGg'F$ esprime un segmento, e l' altra $BCDB$ un settore.

265. Si chiama *linea iscritta nel cerchio* quella retta che ha le sue estremità alla circonferenza. Dicesi poi *angolo iscritto nel cerchio* quello che ha il vertice nella circonferenza e due corde per lati.

266. Quella linea retta che incontra la circonferenza di un cerchio in un sol punto senza secarla, si chiama *tangente*, ed il punto d' incontro comune alla retta ed alla circonferenza, vien detto *punto* di *contatto*.

CAPO II.

DELLE RETTE CHE CONDOTTE NEL MEDESIMO PIANO S' INCONTRANO.

267. *Qualunque retta che ne incontra un'altra, fa con questa due angoli adiacenti, dei quali la somma agguaglia due angoli retti.*

La retta CD (*fig. 11.ª*) incontri la AB nel punto D. Da questo punto si concepisca innalzata la perpendicolare DE alla AB; avremo (256)

$$ADC+CDE+EDB=ADC+CDB.$$

Ma si ha pure

$$ADC+CDE+EDB=ADE+EDB.$$

Quindi sarà

$$ADC+CDB=ADE+EDB.$$

Or la somma degli angoli ADE, EDB è uguale a due angoli retti (257). Adunque sarà eziandio uguale a due angoli retti la somma degli angoli ADC, CDB.

Adunque 1.° se uno degli angoli adiacenti, per esempio ADC, è retto, anche l' altro CDB sarà retto.

2.° Se la retta CD (*fig.* 12.ª) è perpendicolare alla AB, sarà vicendevolmente la AB perpendicolare alla CD. Poichè essendo la CD perpendicolare alla AB, sarà l'angolo AEC retto, e quindi ancora sarà (1.°) retto l'angolo AED. Adunque l'angolo $AEC=AED$, e conseguentemente la AB è perpendicolare alla CD.

3.° Se tre rette AD, BD, CD (*fig.* 13.ª) concorrano nel medesimo punto D in modo che la somma degli angoli ADB, BDC sia ugnale a due angoli retti, le due AD, CD formeranno una sola linea retta. Poichè se ciò non fosse, prolungando la AD verso E, le due somme

$$ADB+BDC,\ ADB+BDE$$

sarebbero fra loro uguali; infatti ciascuna di esse equivarrebbe a due angoli retti, la prima per supposizione, e la seconda per ciò che è dimostrato nella proposizione. Ora l'angolo ADB è comune alle due somme. Dunque $BDC=BDE$, cioè la parte ugnale al tutto, lo che è assurdo. Non può dunque il prolungamento di AD essere diverso dalla retta CD.

4.° Tutti gli angoli consecutivi BAC, $B'AB$, $B''AB'$, ... (*fig.* 2.ª) formati dalla medesima parte di una retta $B^{IV}C$ da un qualunque numero di rette BA, $B'A$, $B''A$, ... concorrenti nel medesimo punto A della stessa $B^{IV}C$, presi insieme equivarranno a due angoli retti.

268. *Se due rette hanno due punti comuni, esse coincideranno in tutta la loro estensione, nè formeranno che una sola e medesima linea retta.*

Sieno A, B (*fig.* 14.ª) i due punti comuni ad entrambe le linee rette; dal punto A al punto B non potendosi condurre che una sola linea retta (253), tra A e B le due rette non potranno formarne che una solamente. Suppongasi pertanto che le medesime essendo prolungate comincino a separarsi nel punto C, prendendo l'una la direzione CD, e l'altra la direzione CE. Dal punto C s'intenda innalzata la CF che faccia con la CA l'angolo ACF retto. Poichè la linea ACD è retta, sarà (267. 1.°) l'angolo FCD retto, e per la medesima ragione essendo la linea ACE retta, sarà retto l'angolo FCE. Adunque l'angolo $FCD=FCE$, cioè il tutto nguale alla sua parte, lo che è assurdo. Adunque le due rette che hanno i due punti A e B comuni prolungate all'infinito non mai si separeranno, e conseguentemente non formeranno che una sola e medesima linea retta.

269. *Due rette che si tagliano fanno gli angoli opposti al vertice uguali fra loro.*

Questa proposizione si renderà evidente con la *fig.* 7.ª; conciosiachè noi abbiamo (267)

$$AEC+CEB=2 \text{ retti},\ CEB+BED=2 \text{ retti}.$$

Adunque sarà

$$AEC+CEB=CEB+BED,$$

e quindi $AEC=BED$. Parimenti si ha

$$CEB+BED=BED+DEA,$$

donde si deduce $CEB=DEA$.

Adunque 1.° I quattro angoli formati intorno al punto d' incontro di due rette che si secano, equivalgono a quattro angoli retti.

2.° Ed in generale tutti gli angoli consecutivi AIC, CIE, EIG, GIB, BID, . . . (*fig. 15.ª*) formati da un numero qualunque di rette AB, CD, EF, ... che s' incontrano in un medesimo punto I, hanno per somma quattro angoli retti.

CAPO III.

DEI TRIANGOLI, E DI ALCUNE DELLE LORO PRINCIPALI PROPRIETA'.

270. ***Due triangoli sono uguali, quante volte hanno un angolo uguale compreso tra due lati rispettivamente uguali.***

Si abbiano i due triangoli ABC, $A'B'C'$ (*fig. 16.ª*), nei quali suppongasi

$$AB=A'B',\ AC=A'C',\ A=A'.$$

Se al triangolo ABC s' intenda soprapposto l' altro $A'B'C'$ in modo che il vertice A' cada sul vertice A, ed il lato $A'B'$ sul lato AB, per la uguaglianza di questi lati, il punto B' cadrà sul punto B, e per la uguaglianza degli angoli A, A', e dei lati AC, $A'C'$, il lato $A'C'$ coinciderà col lato AC, ed il punto C' cadrà sul punto C. Adunque il triangolo $A'B'C'$ coinciderà perfettamente col triangolo ABC; sarà quindi il triangolo ABC uguale al triangolo $A'B'C'$.

Se dunque nei triangoli ABC, $A'B'C'$ si hanno

$$AB=A'B',\ AC=A'C',\ A=A';$$

si avranno altresì

$$BC=B'C',\ B=B',\ C=C'.$$

271. ***Due triangoli sono uguali, allorchè hanno un lato uguale adiacente a due angoli rispettivamente uguali.***

Propongansi i due triangoli ABC, $A'B'C'$, nei quali sieno

$$BC=B'C',\ B=B',\ C=C'.$$

Se il triangolo $A'B'C'$ suppongasi soprapposto al triangolo ABC in modo che il lato $B'C'$ coincida col lato BC, per la uguaglianza degli angoli B, B', il lato $B'A'$ cadrà sul lato BA, e per la uguaglianza degli altri due angoli C, C', il lato $C'A'$ prenderà la direzione di CA: in tal guisa il punto A' dovendosi trovare contemporaneamente sopra BA e CA, cadrà sulla loro comune intersezione A. Adunque il triangolo $A'B'C'$ coinciderà col triangolo ABC; sarà quindi il triangolo ABC uguale al triangolo $A'B'C'$.

Adunque se nei triangoli ABC, $A'B'C'$ si hanno

$$BC=B'C',\ B=B',\ C=C';$$

si avranno eziandio

$$AB=A'B',\ AC=A'C',\ A=A'.$$

272. *In un triangolo qualunque prolungando uno dei lati, sarà l' angolo esterno maggiore di ciascuno degl' interni opposti.*

Si abbia il triangolo ABC (*fig. 17.ª*), ed un lato di esso, per esempio BC si prolunghi verso F; dico essere l' angolo esterno ACF maggiore di ciascuno degl' interni opposti BAC, ABC. Infatti se da B intendasi condotta pel punto G medio del lato AC la retta indefinita BGD, prendendo $GD=BG$, e congiungendo il punto D col punto C con la retta DC, risulterà (270) il triangolo $ABG=CDG$, poichè per costruzione $AG=GC$, $BG=GD$, e gli angoli AGB, CGD sono uguali, perchè opposti al vertice (269). Sarà dunque l'angolo $BAC=ACD$. Ma $ACD<ACF$; sarà quindi ancora $BAC<ACF$.

Prolungando il lato AC verso E, si dimostrerà nello stesso modo che l' angolo $ABC<BCE$; e siccome l'angolo $BCE=ACF$, sarà eziandio $ABC<ACF$.

Adunque 1.° Essendo $ABC<ACF$, se si aggiugne ACB all' una parte e all' altra della ineguaglianza, si ha $ABC+ACB<ACF+ACB$, ossia $ABC+ACB<2$ retti. Quindi la somma di due angoli qualunque di un triangolo è sempre minore di due retti.

2.° Un triangolo ha almeno due angoli acuti; il terzo angolo può essere acuto, retto, ovvero ottuso.

273. *Due triangoli sono uguali se hanno due angoli rispettivamente uguali, ed un lato uguale opposto nel medesimo modo ad uno di questi angoli uguali.*

Infatti se nei due triangoli ABC, $A'B'C'$ (*fig. 18.ª*) si ha

$$B=B',\ C=C',\ AB=A'B',$$

sarà ancora $BC=B'C'$. Conciosiachè se i due lati BC e $B'C'$ non fossero uguali, uno di essi sarebbe maggiore dell' altro : sia $B'C'>BC$; prendendo in $B'C'$ una parte $B'a=BC$, e conducendo $A'a$, risulterà (270) il triangolo $A'B'a=ABC$, poichè per costruzione $B'a=BC$, e per supposizione $A'B'=AB$, e $B'=B$. Laonde sarà l'angolo $A'aB'=C$; ma $C=C'$. Dunque $A'aB'=C'$, lo che è assurdo (272).

Da siffatta proposizione deducesi che due triangoli rettangoli sono uguali, quando, oltre le ipotenuse uguali, hanno ancora un angolo acuto uguale.

274. *Se da un punto preso dentro di un triangolo, conducansi alle estremità di un lato due linee rette, sarà la somma di queste rette minore della somma degli altri due lati.*

Da un punto qualunque O (*fig. 19.ª*) preso dentro del triangolo ABC conducansi alle estremità B, C del lato BC le rette OB, OC; quindi pel medesimo punto O si faccia passare la retta mn, la quale sechi gli altri due lati AB, AC in m, n; avremo (260)

$$OB<Bm+mO,\ \ OC<Cn+nO,$$

donde si dedurrà

$$OB+OC<Bm+mO+Cn+nO.$$

Ma $mO+nO=mn$, ed $mn<Am+An$. Sarà quindi a più forte ragione

$$OB+OC<Bm+Am+Cn+An.$$

Ora $Bm+Am=AB$, $Cn+An=AC$. Dunque

$$OB+OC<AB+AC.$$

275. *Se due lati di un triangolo sono uguali rispettivamente a due lati di un altro triangolo, e l' angolo compreso dai primi due è maggiore dell' angolo compreso dai secondi; sarà il terzo lato del primo triangolo maggiore del terzo lato del secondo triangolo.*

Nei due triangoli ABC, $A'B'C'$ (*fig. 20.ª*) si abbiano $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, e l' angolo $A>A'$. Se il triangolo $A'B'C'$ soprappongasi al triangolo ABC in modo che il lato $A'C'$ coincida col suo uguale AC, il lato $A'B'$ prenderà la direzione AEF, ed il punto B' o cadrà dentro il triangolo in D, o sopra il lato BC in E, o fuori del triangolo in F.

Nel primo caso avendosi (274) $AD+DC<AB+BC$, togliendo dal primo membro il lato AD, e dal secondo il suo uguale AB, rimarrà $DC<BC$, cioè $B'C'<BC$.

Nel secondo caso, in cui B' cade in E sopra di BC, è chiaro che EC ovvero $B'C'<BC$.

Finalmente nel terzo caso, avendosi (260)

$$EF+EC>FC, \text{ ed } EA+EB>AB;$$

si otterrà

$$EF+EC+EA+EB>FC+AB, \text{ ossia } AF+BC>FC+AB.$$

Togliendo AF dal primo membro di questa ultima inegualianza, ed AB dal secondo, giacchè per ipotesi $AF=A'B'=AB$, si avrà $BC>FC$. Ma $FC=B'C'$. Adunque sarà pure in questo terzo caso $B'C'<BC$.

Vicendevolmente se nei due triangoli ABC, $A'B'C'$ si ha $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, ma il lato $BC>B'C'$; sarà l' angolo $A>A'$. Perocchè se fosse $A=A'$, si avrebbe (270) il triangolo $ABC=A'B'C'$, e quindi $BC=B'C'$; se poi si supponesse $A<A'$, per ciò che si è dimostrato finora, dovrebbe essere $BC<B'C'$. Ma ambedue queste conseguenze sono contrarie alla supposizione. Adunque non può non essere $A>A'$.

276. *Due triangoli sono uguali, allorchè hanno i tre lati rispettivamente uguali.*

Si abbiano i due triangoli ABC, $A'B'C'$ (*fig. 16.ª*), nei quali si suppongano tutti i tre lati rispettivamente uguali, cioè

$$AB=A'B', AC=A'C', BC=B'C';$$

dico essere altresì uguali rispettivamente tutti i tre angoli, cioè

$$A=A', B=B', C=C'.$$

Imperocchè se i due angoli A, A' non fossero uguali fra loro, uno di essi sarebbe maggiore dell' altro. Sia $A>A'$; essendo per ipotesi $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, sarà (275) $BC>B'C'$. Ma per supposizione $BC=B'C'$. Non può dunque essere $A>A'$, non può cioè l' angolo A non aggnagliare l' angolo A'. Nella medesima guisa si dimostrerebbe $B=B'$, $C=C'$.

277. *In un triangolo isoscele gli angoli opposti ai lati uguali sono uguali.*

Sia il triangolo ABC (*fig. 21.ª*), ed in esso $AB=AC$. Dal vertice A al punto medio D della base BC conducasi la retta AD; questa dividerà il triangolo ABC in due altri triangoli ABD, ACD uguali fra loro (276). Infatti il lato AD è ad ambedue comune, per supposizione $AB=AC$, e per costruzione $BD=CD$. Sarà dunque l' angolo $B=C$.

Quindi 1.° Il triangolo equilatero ha tutti i suoi tre angoli uguali.

2.° La uguaglianza dei triangoli ABD, ACD dimostra nel tempo stesso che l' angolo $BAD=CAD$, e che l' angolo $ADB=ADC$. Adunque la retta AD divide l' angolo BAC in due parti uguali, ed è (257) perpendicolare alla base BC.

278. *Reciprocamente se in un triangolo due angoli sono uguali, i lati opposti a questi angoli saranno eziandio uguali, ed il triangolo sarà perciò isoscele.*

Propongasi il triangolo ABC (*fig. 22.ª*), in cui sia l'angolo $ACB=ABC$; sarà il lato $AB=AC$. Perocchè se questi due lati non fossero uguali fra loro, prendendo sul maggiore di essi, per esempio AB, una parte BD uguale all'altro lato AC, e conducendo DC, i due triangoli ABC e DBC dovrebbero essere (270) uguali fra loro. Infatti questi due triangoli avrebbero il lato BC comune ad ambedue, il lato $BD=AC$ per costruzione, e per supposizione l' angolo $ACB=ABC$. Ma è impossibile che sia il triangolo $ABC=DBC$, perchè il tutto non può aggnagliare la parte. Adunque non può non essere il lato $AB=AC$.

Dunque un triangolo che ha i suoi tre angoli uguali è equilatero.

279. *Di due lati di uno stesso triangolo, il maggiore è quello che si oppone all' angolo maggiore; e vicendevolmente di due angoli di uno stesso triangolo, il maggiore è quello che si oppone al lato maggiore.*

Nel triangolo ABC (*fig. 23.ª*) sia l' angolo $ABC>C$; costruendo l' angolo $DBC=C$, nel triangolo BCD sarà (278) il lato $BD=CD$. Or noi abbiamo (260) $AB<AD+DB$, ed $AD+DB=AD+DC=AC$. Dunque $AB<AC$.

Vicendevolmente se $AB<AC$, sarà $ABC>C$. Perocchè non può essere $ABC<C$, altrimenti da ciò che si è dimostrato ora ne conseguiterebbe $AB>AC$, lo che è contrario alla fatta supposizione. Nè può essere $ABC=C$, perchè altrimenti si avrebbe (278) $AB=AC$, lo che pure ripugna alla supposizione già fatta.

CAPO IV.

DELLE RETTE PERPENDICOLARI E DELLE OBLIQUE.

280. *Da un punto qualunque dato fuori di una retta, non può condursi a questa retta che una sola perpendicolare.*

Suppongasi per poco che sulla retta AB (*fig. 24.ª*) dal punto C possano abbassarsi due perpendicolari CD, CE. Prolungando CD finchè si abbia $CD=DF$, e congiungendo il punto E col punto F con la retta EF, sarà (270) il triangolo $CDE=FDE$; perocchè per costruzione il lato $CD=DF$, il lato DE è comune, e gli angoli CDE, FDE sono uguali, perchè retti (267. 2.°). Sarà dunque l'angolo $CED=FED$; ma per ipotesi l'angolo CED è retto: dunque anche l'angolo FED sarà retto. Si avrà quindi $CED+FED=2$ retti. Ma se la somma dei due angoli adiacenti CED, FED equivale a due angoli retti, la linea CEF non può non essere retta (267. 3.°). Adunque per i due punti C ed F potranno condursi le due linee rette CDF, CEF, la qual cosa è impossibile (253). Non potrà quindi da un punto qualunque dato fuori di una retta condursi a questa retta che una sola perpendicolare.

È parimente impossibile da un punto qualunque dato in una retta, innalzare su questa retta due perpendicolari.

Infatti se dal medesimo punto D (*fig. 11.ª*) della retta AB potessero innalzarsi sopra la medesima AB due perpendicolari DE, DC, gli angoli ADE, ADC sarebbero ambedue retti, e quindi (257) fra loro uguali, sarebbe cioè il tutto uguale alla sua parte, lo che è impossibile.

281. *Da un punto situato fuori di una retta, abbassando su questa medesima retta la perpendicolare e diverse oblique; sarà sempre la perpendicolare più corta di una qualunque delle oblique; due oblique condotte da una parte e dall'altra della perpendicolare ad uguali distanze dalla medesima saranno uguali; finalmente di due oblique condotte a disuguali distanze dalla perpendicolare, quella sarà più corta che meno si allontana dalla perpendicolare medesima.*

Questa proposizione ha tre parti, delle quali la prima si dimostra nella seguente guisa. Dal punto C (*fig. 25.ª*) situato fuori della retta AB si abbassi sopra questa medesima AB la perpendicolare CD, e una qualunque obliqua CG. Prolungando la CD finchè si abbia $DE=CD$, ed unendo il punto G col punto E per mezzo della retta GE, risulterà (270) il triangolo $DEG=DCG$; e si avrà per conseguenza $CG=GE$. Ora essendo (260) $CE<CG+GE$, sarà $2CD<2CG$. Adunque $CD<CG$.

Prendendo inoltre $DH=DG$, e dal punto C abbassando la obliqua CH, i due triangoli CDG, CDH saranno (270) fra loro uguali, e conseguentemente $CG=CH$, ciò che dimostra ad evidenza la verità della seconda parte della proposizione.

Finalmente dal medesimo punto C abbassando la obliqua CF distante dalla perpendicolare CD più che l'altra obliqua CG, e congiungendo FE, sarà

$CF=FE$. Quindi nel triangolo CEF avendosi (274) $CG+GE<CF+FE$, sarà $2CG<2CF$; donde $CG<CF$. La obliqua cioè che più si discosta dalla perpendicolare è la più lunga.

Adunque 1.° La vera distanza di un punto da una retta è la perpendicolare che dal punto si abbassa sopra la retta; infatti questa perpendicolare segna il più corto cammino dal punto alla retta.

2.° Da un punto dato fuori di una retta, non possono condursi a questa retta più di due oblique uguali fra loro.

3.° Se la CD (*fig.26.ª*) è perpendicolare alla AB nel suo punto medio D, qualunque punto E, F, G, . . . di CD dista ugualmente dalle due estremità A, B della retta AB, e si ha $EA=EB$, $FA=FB$, $GA=GB$, . . .

4.° Qualunque punto I (*fig. 27.ª*) che sia situato fuori della perpendicolare CD alla retta AB nel suo punto medio D, dista disugualmente dalle due estremità A, B della medesima AB. Infatti conducendo IA, IB, ed EB, abbiamo $IB<IE+EB$. Ma $EB=EA$. Dunque $IB<IE+EA$, cioè $IB<IA$.

5.° Due triangoli rettangoli ABC, $A'B'C'$ (*fig. 28.ª*) sono uguali quante volte, oltre la ipotenusa $AC=A'C'$, hanno eziandio un cateto $AB=A'B'$. Perocchè in questa supposizione sarà l' altro cateto $BC=B'C'$. Infatti se i due cateti BC e $B'C'$ non fossero uguali fra loro, uno di essi sarebbe maggiore dell'altro: sia $B'C'>BC$; prendendo in $B'C'$ una parte $B'a=BC$, e congiungendo $A'a$, sarà (270) il triangolo $ABC=A'B'a$, e conseguentemente $AC=A'a$. Ma per ipotesi $AC=A'C'$; dunque $A'a=A'C'$, lo che è impossibile, essendo $A'a$ ed $A'C'$ due oblique non ugualmente discoste dalla perpendicolare $A'B'$.

6.° Nel triangolo isoscele ABC (*fig. 21.ª*) se dal vertice A dell' angolo BAC compreso dai due lati uguali AB, AC, si abbassi sopra la base BC la perpendicolare AD, questa perpendicolare dividerà la base BC e l' angolo BAC in due parti uguali. Infatti i due triangoli rettangoli ADB, ADC sono (5.°) fra loro uguali.

CAPO V.

DELLE LINEE RETTE PARALLELE.

282. *Due rette sono parallele allorchè, essendo situate nel medesimo piano e secate da una terza retta, soddisfanno ad una delle cinque seguenti condizioni*: 1.ª *che la somma degli angoli interni dalla medesima parte sia uguale a due angoli retti*; 2.ª *che sieno uguali fra loro gli angoli alterni-interni*; 3.ª *che gli angoli interni-esterni sieno fra loro uguali*; 4.ª *che uguali altresì sieno fra loro gli angoli alterni-esterni*; 5.ª *che la somma degli angoli esterni dalla medesima parte sia uguale a due angoli retti*.

Le due rette AB, CD (*fig. 29.ª*) vengano secate dalla terza EF, e si supponga 1.° $BGI+GID=2$ retti; se in questa supposizione le rette AB, CD prolungate dall' una e dall' altra parte s' incontrassero in un qualche punto O, il

triangolo GOI conterrebbe due angoli, dei quali la somma sarebbe uguale a due retti, lo che è impossibile (272. 1.°). Adunque le rette AB, CD prolungate all' infinito dall' una parte o dall' altra non mai s' incontreranno, e saranno perciò parallele (258).

2.° $AGI=GID$; siccome $AGI+BGI=2$ retti (267), in questo secondo caso si avrà ancora $BGI+GID=2$ retti, e conseguentemente (1.°) le rette AB, CD saranno parallele. D' altronde se il triangolo GOI fosse possibile, si avrebbe (272) l' angolo esterno $AGI>GID$ contro la supposizione.

3.° $EGB=GID$; essendo (267) $EGB+BGI=2$ retti, sarà pure $BGI+$ $+GID=2$ retti: avendosi inoltre (269) $EGB=AGI$, si avrà ancora $AGI=$ $=GID$. Adunque il caso attuale si riduce ai precedenti. D' altronde supponendo possibile il triangolo GOI, dovrebbe essere (272) l' angolo esterno $EGB>GID$, lo che è contro la supposizione.

4.° $EGB=CIF$; l' angolo $CIF=GID$ (269), e perciò $EGB=GID$, donde (3.°) $BGI+GID=2$ retti, ed $AGI=GID$. Ma in questi casi le rette AB, CD sono parallele. Dunque ec.

5.° $EGB+DIF=2$ retti; noi abbiamo (267) $CIF+DIF=2$ retti: adunque $EGB+DIF=CIF+DIF$, ossia $EGB=CIF$, e perciò (4.°) questo quinto caso riducesi ad uno qualunque dei quattro precedenti.

283. *Due rette perpendicolari ad una terza sono parallele fra loro.*

Questa proposizione deducesi immediatamente dalla precedente; poichè ove le due rette AB, CD si suppongano perpendicolari alla EF, verranno soddisfatte tutte le cinque condizioni sopra assegnate. D' altronde se le succennate rette prolungate sufficientemente, s' incontrassero in un qualche punto O, le rette OG, OI sarebbero due perpendicolari condotte dal medesimo punto O sopra di EF lo che è impossibile (280).

284. Delle due rette BB', AA' (*fig. 30.ª*) la prima si supponga essere perpendicolare alla YZ, e l' altra obliqua fare con la medesima YZ gli angoli adiacenti $A'AZ$, $A'AY$ non retti: se l' angolo $A'AZ$ è acuto, prolungando sufficientemente sopra di YZ le rette AA', BB', la obliqua AA' dovrà necessariamente incontrare la perpendicolare BB', ed estendersi al di là della medesima secandola.

Dal punto A sopra di YZ si concepisca innalzata la perpendicolare AX; questa conterrà con la obliqua AA' un determinato angolo XAA'. Questo angolo intendasi aggiunto a se stesso tante volte, quante fa mestieri perchè quindi ne nasca l' angolo ottuso $XAU=n.XAA'$, dinotando n un certo determinato numero intero. Prolunghisi inoltre la YZ in modo da poter prendere in essa gli n intervalli uguali AB, BC, CD, DE, . . . e dai punti C, D, E, . . . s' immaginino erette sopra della medesima YZ le perpendicolari CC', DD', EE'. . . .

Posto ciò, gli spazii indefiniti $XABB'$, $B'BCC'$, ... sono tutti fra loro uguali; perchè piegando la figura lungo la perpendicolare BB', è evidente che le due strisce $XABB'$, $B'BCC'$ si soprapporranno l'una all'altra in perfetta coincidenza. Anche gli spazii indefiniti XAA', $A'AA''$, . . . sono fra loro uguali. Laonde dinotando con s, S, s', S', gli spazii indefiniti XAA', XAU, $XABB'$, $XAHH'$, avremo

$$S=ns,\ S'=ns',\ \text{e quindi}\ \frac{S}{S'}=\frac{s}{s'}.$$

Ma si ha $S>S'$; dunque sarà pure $s>s'$, Ora se le rette AA', BB' prolungate

indefinitamente non s'incontrassero, lo spazio indefinito XAA' compreso fra i lati dell' angolo XAA' certamente non sarebbe maggiore dello spazio indefinito $XABB'$ compreso nella striscia $XABB'$. Adunque ec.

Quindi si deduce 1.° che quando due rette AB, CD (*fig. 31.ª*) sono parallele, la perpendicolare KL condotta sopra CD è pure perpendicolare ad AB; poichè se ciò non fosse, le rette AB, CD prolungate sufficientemente dovrebbero incontrarsi, lo che è impossibile.

2.° Che per un punto qualunque K non può condursi che una sola parallela a CD, cioè (280) la sola AB perpendicolare alla retta KL, la quale dal punto K si abbassa perpendicolarmente sopra CD.

285. *Se due rette parallele sono secate da una terza retta; 1.° la somma degli angoli interni dalla stessa parte è uguale a due retti; 2.° gli angoli alterni-interni sono fra loro uguali; 3.° uguali altresì sono fra loro gli angoli interni-esterni; 4.° gli angoli alterni-esterni sono uguali fra loro; 5.° finalmente la somma degli angoli esterni dalla medesima parte è uguale a due retti.*

Le due parallele AB, CD (*fig. 32.ª*) sieno secate dalla retta EF nei punti G ed I. Sia H il punto medio di GI; dal punto H abbassando sopra CD la perpendicolare HL, e prolungando questa in K, i due triangoli HLI, HKG avranno (284. 1.°) gli angoli in L,K retti, i lati opposti HI,HG uguali fra loro, e gli angoli opposti al vertice H eziandio uguali fra loro; sarà (273) dunque il triangolo $HLI=HKG$, e per conseguenza l'angolo $AGI=GID$. Posto ciò, ecco in qual modo si dimostrano le singole parti della enunciata proposizione.

1.° Abbiamo (267) $BGI+AGI=$2 retti; ma $AGI=GID$; dunque $BGI+GID=$2 retti. Similmente essendo $GID+GIC=$ 2 retti, sarà pure $AGI+GIC=$2 retti.

2.° Già si è dimostrato essere gli angoli interni-alterni AGI, GID uguali fra loro; e siccome $BGI+AGI=$2 retti$=GID+GIC$, sarà pure l' angolo $BGI=GIC$.

3.° Noi abbiamo (269) $EGB=AGI$; ma $AGI=GID$; dunque $EGB==GID$. Similmente $EGA=BGI$; ma (2.°) $BGI=GIC$; dunque $EGA=GIC$.

4.° L' angolo $EGB=AGI$, come ancora $CIF=GID$; ma $AGI=GID$; dunque $EGB=CIF$. Nello stesso modo si dimostra essere l'angolo $EGA=DIF$, poichè $EGA=BGI$, $DIF=GIC$; ma (2.°) $BGI=GIC$; dunque $EGA=DIF$.

5.° Finalmente (267) $EGB+BGI=$2 retti, $GID+DIF=$2 retti, e quindi $EGB+BGI+GID+DIF=$4 retti. Ma (1.°) $BGI+GID=$2 retti. Dunque $EGB+DIF=$2 retti. Similmente si dimostrerebbe essere $EGA++CIF=$2 retti.

286. *Due rette parallele ad una terza, sono parallele fra loro.*

Ambedue le rette AB, CD (*fig. 33.ª*) si suppongano parallele alla retta MN; condotta una secante qualunque EF, sarà (285. 3.°) l' angolo $EGB==GON$, e $GID=GON$; dunque $EGB=GID$; dunque (282. 3.°) le rette AB, CD sono parallele. Questa proposizione potrebbe dimostrarsi ancora così: suppongasi che la secante EF si conduca in modo da riuscire perpendicolare alla AB; essa risulterà (284. 1.°) perpendicolare ancora alla MN; ed essendo la EF perpendicolare alla MN, lo sarà pure alla CD. Adunque le rette AB, CD sono ambedue perpendicolari alla EF, e conseguentemente (283) fra loro parallele.

287. *Due rette parallele sono da per tutto equidistanti.*

Sieno le due rette AB, CD (*fig. 34.ª*) parallele. Se dai due punti E, G presi ad arbitrio nella AB s'intendano abbassate le perpendicolari EF, GH alla CD, esse riusciranno (284. 1.°) perpendicolari ancora alla AB, ed insieme parallele fra loro (283). Quindi conducendo FG, i due triangoli FGE, FGH avranno (285. 2.°) gli angoli $EGF=GFH$, $EFG=FGH$, ed il lato FG comune, e perciò essi saranno (271) fra loro uguali; dunque il lato EF che misura la distanza delle parallele AB, CD dal punto E, sarà uguale al lato GH che misura la distanza delle medesime parallele dal punto G.

288. *Due angoli sono uguali, se hanno i lati rispettivamente paralleli, e diretti nel medesimo senso.*

Infatti supponendo che gli angoli BAC, EDF (*fig. 35.ª*) abbiano i lati rispettivamente paralleli e diretti nello stesso senso, se si prolunghi ED in G, sarà (285. 3.°) l'angolo $BAC=EGC$, come ancora l'angolo $EGC=EDF$; dunque $BAC=EDF$.

CAPO VI.

DI ALCUNE PROPRIETA' DEGLI ANGOLI INTERNI ED ESTERNI DEI POLIGONI.

289. *La somma dei tre angoli di un qualunque triangolo agguaglia due angoli retti.*

Propongasi un qualunque triangolo ABC (*fig. 36.ª*); di questo si prolunghi il lato BC in E, e per il punto C s'intenda condotta la parallela CD al lato AB; sarà (285. 2.° 3.°) l'angolo $A=ACD$, e l'angolo $B=DCE$. Adunque la somma dei tre angoli del triangolo è uguale alla somma dei tre angoli formati nel punto C. Ma questa somma agguaglia (267. 4.°) due angoli retti. Dunque ec.

Da questa proposizione si deduce 1.° che in ogni triangolo ABC prolungando uno dei suoi lati, per esempio BC verso E, l'angolo esterno ACE è uguale alla somma dei due angoli interni opposti A e B, lo che rende più generale la proposizione già dimostrata sopra (272).

2.° Che conoscendo in un triangolo due dei suoi tre angoli, si conoscerà il terzo sottraendo da due angoli retti la somma dei due angoli dati.

3.° Che se due angoli di un triangolo sono rispettivamente uguali a due angoli di un altro triangolo; sarà il terzo angolo del primo triangolo uguale al terzo angolo del secondo triangolo.

4.° Che un triangolo non può avere che un solo angolo retto o ottuso (272. 2.°).

5.° Che nel triangolo rettangolo la somma dei due angoli acuti è uguale ad un angolo retto.

6.° Che nel triangolo equilatero, il quale è eziandio equiangolo (277. 1.°), ciascun angolo agguaglia la terza parte di due angoli retti.

290. *La somma di tutti gli angoli interni di un poligono qualunque è*

uguale a tante volte due angoli retti, quanti sono i lati del poligono meno due.

Propongasi infatti un qualunque poligono $ABCDE$ ec. (*fig.* 37.ª); se dal vertice di uno stesso angolo A si conducano ai vertici degli angoli opposti C, D, E, ec. le diagonali AC, AD, AE, ec. sarà facile il vedere 1.° che il poligono resterà diviso in tanti triangoli quanti sono i suoi lati meno due; 2.° che la somma degli angoli di tutti questi triangoli è uguale alla somma di tutti gli angoli del poligono. Ora in ogni triangolo la somma dei tre angoli è uguale a due retti (289). Sarà dunque la somma di tutti gli angoli del poligono uguale a tante volte due angoli retti quanti sono i suoi lati meno due (*).

Dinotando quindi con n il numero dei lati di un qualunque poligono, sarà la somma di tutti gli angoli interni dello stesso poligono uguale a $2(n-2)$ retti. Donde consegnita

1.° Che la somma dei quattro angoli di un quadrilatero qualunque è uguale a quattro angoli retti. Adunque se tutti gli angoli di un quadrilatero sono fra loro uguali, ciascuno sarà un angolo retto; lo che fa ragione a ciò che si è supposto sopra (261) per riguardo alle definizioni del quadrato e del rettangolo.

2.° Che la somma dei cinque angoli di un pentagono è uguale a sei angoli retti; per conseguenza se un pentagono ha tutti gli angoli fra loro uguali, ciascuno di essi equivarrà ai $\frac{6}{5}$ di un angolo retto.

3.° Che la somma dei sei angoli di un esagono è uguale a otto angoli retti; e perciò ove tutti gli angoli di un esagono fossero uguali fra loro, ciascuno di essi sarebbe uguale agli $\frac{8}{6}$ di un angolo retto.

291. *La somma degli angoli esterni che si formano prolungando in un medesimo senso tutti i lati di un poligono qualunque è uguale a quattro angoli retti.*

Nel poligono $ABCD$ ec. (*fig.* 38.ª) prolungando i lati AB, BC, CD, ec. nel medesimo senso verso A', B', C', ec. ciascuno degli angoli interni, per esempio A col suo corrispondente esterno FAB è uguale (267) a due angoli retti; sarà quindi la somma di tutti gli angoli interni ed esterni uguale a tante volte due retti quanti sono i lati del poligono. Ora se n è il numero di questi lati, la somma di tutti gli angoli interni è (290) uguale a $2(n-2)$ retti. Adunque la somma di tutti gli angoli esterni sarà

$$2n \text{ retti} - 2(n-2) \text{ retti} = 4 \text{ retti}.$$

(*) Volendo applicare questa proposizione ai poligoni che hanno uno o più angoli *rientranti* (*fig.* 39.ª), ognuno di questi angoli dovrebbe considerarsi come maggiore di due angoli retti; avvertasi però che noi, e qui, e nel decorso ancora di queste geometriche istituzioni non intendiamo parlare di altri poligoni che di quelli i quali hanno tutti gli angoli *salienti*, che si possono eziandio chiamare *poligoni convessi*. Il poligono convesso è tale che conducendo in esso una linea retta in quel modo che si vorrà, questa non può mai incontrare il perimetro del poligono che in soli due punti.

CAPO VII.

DI ALCUNE PROPRIETA' DEI QUADRILATERI PARALLELOGRAMMI.

292. Dalla proposizione dimostrata sopra (283) agevolmente rilevasi, che i quadrilateri quadrati e rettangoli sono (261) ancora parallelogrammi.

In un qualsivoglia quadrilatero parallelogrammo i lati opposti sono uguali fra loro, ed uguali fra loro sono altresì gli angoli opposti.

Infatti se nel parallelogrammo $ABCD$ (*fig. 40.ª*) si concepisca condotta la diagonale AC, i due triangoli ABC, ADC, oltre il lato comune AC, avranno eziandio (285. 2.°) l'angolo $BAC=ACD$, e l'angolo $ACB=DAC$. Adunque (271) saranno i lati $AB=DC$, $AD=BC$, e gli angoli $ABC=ADC$, $BAD=DCB$.

Da questa proposizione chiaramente apparisce, che due rette parallele comprese fra due altre rette parallele, sono fra loro uguali.

293. *Il quadrilatero che ha i lati opposti uguali fra loro, è un perfetto parallelogrammo.*

Nel quadrilatero $ABCD$, supponendo $AB=DC$, $AD=BC$, ove si conduca la diagonale AC, i due triangoli ABC, ADC avranno i tre lati rispettivamente uguali, e perciò essi saranno (276) fra loro uguali. Adunque l'angolo $BAC=ACD$ e l'angolo $ACB=DAC$, e conseguentemente (282. 2.°) il lato AB sarà parallelo al lato DC, ed il lato AD parallelo al lato BC. Quindi il quadrilatero $ABCD$ sarà (261) un perfetto parallelogrammo.

Adunque la losanga è un quadrilatero parallelogrammo.

294. *Se due lati opposti di un quadrilatero sono fra loro uguali e paralleli, gli altri due lati saranno eziandio uguali fra loro e paralleli; e quindi il quadrilatero sarà parallelogrammo.*

Infatti se nel quadrilatero $ABCD$ il lato AB è uguale e parallelo al lato DC, segnando la diagonale AC, i due triangoli ABC, ADC risulteranno (270. 285. 2.°) fra loro uguali. Adunque sarà il lato $AD=BC$, l'angolo $ACB=DAC$, e conseguentemente (282. 2.°) ancora AD parallelo a BC. Sarà dunque il quadrilatero $ABCD$ un perfetto parallelogrammo (261).

295. *Le due diagonali di un parallelogrammo si secano scambievolmente in due parti uguali.*

Nel parallelogrammo $ABCD$ (*fig. 41.ª*) conducendo le due diagonali AC, BD, i due triangoli AEB, DEC, ovvero i due AED, BEC senza veruna difficoltà si dimostreranno (271) uguali fra loro. Donde si dedurranno $AE=CE$, $BE=DE$.

Adunque nella losanga ovvero rombo $ABCD$ (*fig. 42.ª*) le diagonali AC, BD si secano ad angoli retti. Infatti essendo (261) $AB=BC$, $AE=CE$, i due triangoli ABE, BCE saranno (276) uguali fra loro; e per conseguenza uguali fra loro saranno altresì gli angoli BEA, BEC, e quindi ciascuno di essi sarà retto (257).

296. *Le due diagonali di un rettangolo sono fra loro uguali.*

Nel rettangolo $ABCD$ (*fig. 43.ª*) l'angolo $ADC=BCD$, il lato

$AD=BC$, ed il lato $AB=DC$. Quindi conducendo le diagonali AC, BD, i triangoli rettangoli ACD, BDC risulteranno (270) uguali fra loro, e conseguentemente sarà $AC=BD$.

Adunque il quadrato ha le due diagonali fra loro uguali, che si secano scambievolmente ad angoli retti (295).

CAPO VIII.

DELLE RETTE PERPENDICOLARI CONSIDERATE NEL CERCHIO, DELLE RETTE TANGENTI E SECANTI ALLA CIRCONFERENZA.

297. *Una linea retta non può incontrare la circonferenza del cerchio in più di due punti.*

Infatti se si supponesse per un tantino che una linea retta potesse incontrare la circonferenza in più di due punti, dovendo tutti questi punti ugualmente distare dal centro del cerchio, si renderebbe possibile ciò che sopra (281. 2.°) si è dimostrato impossibile affatto, si potrebbe cioè da uno stesso punto abbassare sopra una medesima retta più di due rette uguali. Dunque ec.

298. *Nel medesimo cerchio o in cerchi uguali 1.° gli archi uguali sono sottesi da corde uguali, e reciprocamente le corde uguali sottendono archi uguali: 2.° un arco maggiore vien sotteso da una corda maggiore, e reciprocamente.*

1.° Sieno i due cerchi uguali $ABDEA$, $A'B'D'E'A'$ (*fig.* 44.ª), ed in questi l'arco $A\alpha B=A'\alpha'B'$; sarà la corda $AB=A'B'$. Perocchè essendo i diametri AD, $A'D'$ uguali, il semicerchio $A'B'D'$ soprapposto al semicerchio ABD in modo che il diametro $A'D'$ coincida col diametro AD, la semicirconferenza $A'B'D'$ coinciderà con la semicirconferenza ABD, e quindi supposta la uguaglianza degli archi $A'\alpha'B'$, $A\alpha B$, il punto B' cadrà sul punto B; adunque la corda $A'B'$ coinciderà esattamente con la corda AB; si ha dunque $AB=A'B'$.

Reciprocamente se la corda $AB=A'B'$, sarà l'arco $A\alpha B=A'\alpha'B'$. Conducendo infatti i raggi CB, $C'B'$, i due triangoli ABC, $A'B'C'$ risulteranno uguali fra loro (276). È dunque l'angolo $ACB=A'C'B'$; e quindi soprapponendo nella maniera indicata poco prima il semicerchio $A'B'D'$ al semicerchio ABD, il raggio $C'B'$ cadrà sul raggio CB, ed il punto B' sul punto B. Donde deducesi l'arco $A\alpha B=A'\alpha'B'$.

2.° Si abbia l'arco $A\alpha G>A\alpha B$ sarà la corda $AG>AB$. Conducasi il raggio CG; i due lati CA, CG del triangolo AGC sono uguali ai due lati CA, CB del triangolo ABC, e l'angolo $ACG>ACB$. Adunque sarà (275) $AG>AB$.

Vicendevolmente se la corda $AG>AB$, sarà l'arco $A\alpha G>A\alpha B$. Perocchè se si suppone $AG>AB$, con i medesimi triangoli AGC, ABC si dimostrerà agevolmente l'angolo $ACG>ACB$ (275), e quindi l'arco $A\alpha G>A\alpha B$. La seconda parte della proposizione già dimostrata suppone essenzialmente che gli archi dei quali si tiene ragionamento sieno minori della semicirconferenza. Che se gli archi fossero maggiori della semicirconferenza, avrebbe luogo la proprietà

contraria. Infatti essendo l'arco $AEDG$ minore di $AEDB$, la corda AG del primo è maggiore della corda AB del secondo.

299. *Il raggio perpendicolare alla corda di un arco qualunque, divide la corda e l'arco corrispondente in due parti uguali.*

Sia AB (*fig.* 45.ª) la corda corrispondente all'arco AEB; se il raggio CE si suppone perpendicolare alla AB, gli angoli adiacenti CDA, CDB sono retti, e quindi conducendo i raggi CA, CB, i due triangoli ACD, BCD saranno rettangoli ed uguali fra loro (281. 5.°). Adunque $AD=BD$.

Ora conducendo AE, BE, i due triangoli AED, BED avranno il lato $AD=BD$, l'angolo $ADE=BDE$, ed il lato DE comune; sarà perciò (270) il triangolo $AED=BED$, e conseguentemente il lato $AE=BE$. Ma a corde uguali corrispondono archi uguali (298). Adunque l'arco AE corrispondente alla corda AE, sarà uguale all'arco BE corrispondente alla corda BE. Adunque il raggio perpendicolare alla corda ec. (*).

300. Da quanto è detto rilevasi che il centro di un cerchio, il punto medio di una corda qualunque considerata in questo cerchio, e il punto medio dell'arco sotteso da questa corda, sono tre punti situati sopra una medesima retta perpendicolare alla corda. Ora bastano due punti a determinare la direzione di una linea retta (268); adunque ogni linea retta che passa per due dei succennati punti, dovrà necessariamente passare pel terzo, e sarà insieme perpendicolare alla corda.

Dal numero precedente deducesi ancora 1.° che *la perpendicolare innalzata sopra di una corda dal suo punto medio, passa pel centro.* Imperocchè agevolmente comprendesi (280) siffatta perpendicolare essere quella stessa che dal centro si abbassa sulla corda; infatti ambedue queste perpendicolari passano pel punto medio della medesima corda.

2.° Che *due corde non possono mai secarsi scambievolmente per mezzo.* Infatti se per poco suppongasi che le due corde AB, EF (*fig.* 46.ª) scambievolmente si sechino in D per mezzo; dal centro C al punto D abbassando CD, questa dovrebbe risultare perpendicolare ad ambedue le corde AB, EF, ed essere l'angolo $CDB=CDF$, lo che è impossibile.

301. *Nel cerchio* 1.° *le corde uguali, ugualmente distano dal centro*; 2.° *le corde disuguali, disugualmente distano dal centro.*

1.° Nel cerchio $ABFEA$ (*fig.* 47.ª) sieno uguali fra loro le corde AB, EF; dal centro C abbassando sopra queste corde le perpendicolari CD, CG, dico essere $CD=CG$. Imperocchè conducendo i raggi CA, CE, nei due triangoli rettangoli ACD, ECG si avranno $CA=CE$, $AD=EG$; saranno dunque questi triangoli uguali fra loro (281. 5.°), e per conseguenza $CD=CG$.

2.° Sieno in secondo luogo disuguali le corde AB, EK (*fig.* 48.ª) ed $AB<EK$; sarà (298. 2.°) l'arco $A\alpha B<E\alpha' K$. Nell'arco maggiore $E\alpha' K$ prendasi $E\alpha' F$ uguale al minore $A\alpha B$, conducasi inoltre la corda EF, quindi dal centro C si abbassino le perpendicolari CD, CI, CG sopra AB, EK, EF,

(*) Questa proposizione può dimostrarsi più brevemente nel modo che segue. I raggi CA, CB sono per rapporto alla perpendicolare CD due oblique uguali: dunque (281) essi ugualmente si allontanano da questa perpendicolare, e perciò $AD=BD$.

Essendo poi $AD=BD$, qualunque punto della perpendicolare CDE disterà (281. 3.°) ugualmente dalle due estremità A, B. Ora il punto E è uno di questi punti. Sarà dunque la distanza $AE=BE$, e quindi l'arco $AE=BB$ (298. 1.°).

e finalmente si segni con O il punto d'intersezione di CG con EK; avremo $CG>CO$. Ma (281) $CO>CI$: dunque a più forte ragione $CG>CI$. Ma (1.°) $CG=CD$: dunque $CD>CI$; e perciò la minore di due corde disuguali è la più lontana dal centro.

Quindi si deduce che fra tutte le corde che per un punto D (*fig.* 49.ª) dato dentro del cerchio $AEBMA$ si conducono nello stesso cerchio, la più piccola è la AB perpendicolare al raggio CE che passa pel dato punto D. Sia infatti MN un'altra corda qualunque condotta pel medesimo punto D, e CI la sua distanza dal centro C del cerchio; la perpendicolare CI essendo più corta della obliqua CD, la corda MN meno si allontana dal centro che la AB; sarà dunque $MN>AB$.

302. ***La perpendicolare innalzata dalla estremità del raggio, è una tangente alla circonferenza.***

Se dalla estremità I (*fig.* 50.ª) del raggio CI s'intenda innalzata su questo stesso raggio la perpendicolare AB, un qualunque altro punto D di questa perpendicolare dal centro C disterà più che il punto I; infatti la obliqua CD è (281) più lunga della perpendicolare CI. Adunque la perpendicolare AB non ha che il solo punto I comune con la circonferenza, ed è perciò tangente alla circonferenza in questo punto (266).

Risulta da ciò che è detto non potersi dal punto I dato nella circonferenza $MNIM$ condurre che una sola tangente a questa circonferenza medesima. E per verità supponendo che dal punto I potesse condursi un'altra tangente diversa dalla AB, questa nuova tangente non sarebbe (280) perpendicolare al raggio CI. Adunque il raggio CI rispetto alla nuova tangente sarebbe una obliqua, e perciò la perpendicolare abbassata dal centro sopra questa tangente sarebbe minore di CI. Adunque questa pretesa tangente entrerebbe dentro del cerchio secandone la circonferenza, lo che manifestamente ripugna alla definizione della tangente.

303. ***Due rette parallele intercettano sopra la circonferenza archi uguali.***

Suppongasi primieramente che ambedue le rette parallele AB, DE (*fig.* 51.ª) sechino la circonferenza: conducendo il raggio CH perpendicolare alla corda MN, esso riuscirà (284. 1.°) pure perpendicolare alla sua parallela OP; e quindi (299) nel punto H ambedue gli archi MHN, OHP resteranno divisi in due parti uguali $MH=NH$, ed $OH=PH$. Donde deducesi $MH-$ $-OH=NH-PH$, cioè $MO=NP$.

Suppongasi in secondo luogo che delle due parallele AB, DE (*fig.* 52.ª) l'una sia tangente e l'altra secante alla circonferenza; conducendo al punto di contatto H il raggio CH, questo risultando (302) perpendicolare alla tangente AB, sarà perpendicolare alla sua parallela MN. È dunque H il punto medio dell'arco MHN, e quindi gli archi MH, NH compresi fra le due parallele AB, DE saranno uguali.

Da ultimo se ambedue le rette parallele AB, DE (*fig.* 53.ª) sono tangenti alla circonferenza, conducendo la secante parallela FG, sarà $MH=NH$, ed $MK=NK$, e quindi $MH+MK=NH+NK$, cioè $HMK=HNK$.

CAPO IX.

DELLE INTERSEZIONI DEI CERCHI.

304. *Per tre punti dati non in linea retta, si può sempre fare passare una circonferenza di cerchio.*

I tre punti dati sieno *A*, *B*, *C* (*fig.* 54.ª); congiugnendoli con le rette *AB*, *BC*, si suppongano queste divise per metà nei punti *D* ed *F* con le perpendicolari *DE*, *FG*. Siffatte perpendicolari prolungate sufficientemente debbono necessariamente incontrarsi in un punto *O*. Esse infatti in niun caso possono risultare parallele, perchè supponendo per poco che in una qualche particolare disposizione dei tre punti *A*, *B*, *C* le due perpendicolari *DE*, *FG* risultino parallele, la retta *AB* perpendicolare a *DE* dovrebbe essere (284. 1.°) perpendicolare ancora ad *FG*, e quindi l'angolo in *H* dovrebbe essere retto. Ma *BH* prolungamento di *AB* differisce essenzialmente da *BF*, perchè i tre punti *A*, *B*, *C* non si suppongono essere in una medesima linea retta. Adunque potrebbero nella fatta supposizione dal medesimo punto *B* abbassarsi sopra la stessa retta *GFH* le due perpendicolari *BF*, *BH*, lo che è impossibile (280). Adunque le due perpendicolari *DE*, *FG* non mai potranno riuscire parallele, e perciò prolungate sufficientemente dovranno sempre e necessariamente incontrarsi in un punto *O*. Ora il punto *O* essendo comune alle succennate perpendicolari *DE*, *FG*, disterà ugualmente (281) dai tre punti *A*, *B*, *C*, e sarà $OA = OB = OC$. Adunque col centro in *O*, e con il raggio *OA* descrivendo un cerchio, sarà la circonferenza di questo cerchio quella che passerà per i tre punti *A*,*B*,*C*.

La comune intersezione *O* delle due perpendicolari *DE*, *FG*, è l'unico punto che dista ugualmente dai tre punti *A*, *B*, *C*: un qualunque altro punto trovandosi fuori o dell'una, o dell'altra, ovvero ancora di ambedue le perpendicolari *DE*, *FG*, non può ugualmente distare da *A*, da *B*, e da *C*.

Quindi conseguita 1.° che per tre punti dati non si può far passare che una sola circonferenza.

2.° Che due circonferenze non possono secarsi in più di due punti.

305. *Se le circonferenze di due cerchi si secano, la retta che unisce i centri di questi cerchi è perpendicolare alla retta che congiunge i due punti d'intersezione, ed insieme la divide per metà.*

Infatti la retta *AB* (*fig.* 55.ª), che congiunge i due punti *A*, *B* nei quali si secano le circonferenze dei due cerchi *ABDA*, *ABD'A*, è una corda comune all'uno e all'altro di questi cerchi, quindi se dalla metà di questa corda si concepisce innalzata la perpendicolare, questa perpendicolare dovrà (300. 1.°) passare per ciascuno dei due centri *C* e *C'*. Or per due punti non può condursi che una sola linea retta. Dovrà dunque la retta *CC'* che unisce i centri dei due cerchi *ABDA*, *ABD'A* riuscire perpendicolare alla corda *AB*, e nel tempo stesso passare per il suo punto medio.

306. Le circonferenze di due cerchi che hanno un punto comune *A* (*fig.* 55.ª 56.ª) situato fuori della retta *CC'* che congiunge i loro centri si secano. Perocchè in questa supposizione i tre punti *C*, *C'*, *A* danno luogo al

triangolo $CC'A$, nel quale CA, e $C'A$ sono i rispettivi raggi dei due cerchi. Or si può, rovesciando il triangolo $CC'A$ formare un secondo triangolo $CC'B$ simmetrico al primo per riguardo alla retta CC', in cui per conseguenza si abbia $CB=CA$ e $C'B=C'A$. Adunque nella fatta supposizione vi sarà un altro punto B comune alle due circonferenze, e conseguentemente queste due circonferenze si secheranno.

Quindi allorchè le circonferenze di due cerchi si toccano semplicemente la retta CC' (*fig.* 57.ª 58.ª) che congiunge i loro centri passa pel punto di contatto A.

E vicendevolmente, le circonferenze di due cerchi quando hanno un punto comune A situato sopra la retta CC' che congiunge i loro centri, si toccano semplicemente in questo punto; poichè se esse si secassero, la linea CC', contro la supposizione, non passerebbe (305) pel punto comune A.

307. Dal detto finora nel numero precedente si deducono i seguenti teoremi.

1.° *Quantunque volte la distanza dei centri di due cerchi è minore della somma dei raggi, ed insieme è maggiore della loro differenza, le circonferenze dei due cerchi, si secheranno.*

Infatti avrà luogo la intersezione allorchè è possibile il triangolo $CC'A$ (*fig.* 55.ª 56.ª). Ora in questo triangolo (260) $CC'<CA+C'A$, come pure $CC'+CA>C'A$, ossia $CC'>C'A-CA$. Dunque ec. . . .

2.° *Ogni volta che la distanza dei centri di due cerchi è uguale alla somma dei loro raggi, le circonferenze di questi cerchi si toccheranno esternamente* (*fig.* 57.ª).

3.° *Allorchè la distanza dei centri di due cerchi è uguale alla differenza dei loro raggi, le circonferenze di questi cerchi si toccheranno internamente* (*fig.* 58.ª).

CAPO X.

DELLA MISURA DEGLI ANGOLI.

308. *Nel medesimo cerchio, o in cerchi uguali gli angoli uguali, che hanno il vertice nel centro, intercettano nella circonferenza archi uguali.* Reciprocamente, *gli angoli che nel medesimo cerchio o in cerchi uguali, hanno il vertice nel centro ed intercettano nella circonferenza archi uguali, sono uguali.*

Sieno C, C' (*fig.* 59.ª) i centri dei due cerchi uguali $ABDA$, $A'B'D'A'$. Dico primieramente che in questi cerchi, se gli angoli ACB, $A'C'B'$ sono uguali fra loro, saranno eziandio uguali fra loro gli archi AB, $A'B'$. Infatti applicando le due figure l'una sull'altra in guisa che $C'A'$ cada sopra CA, il raggio $C'B'$ si distenderà tutto sul raggio CB, e l'arco $A'B'$ coinciderà perfettamente con l'arco AB, e quindi sarà $AB=A'B'$.

Dico in secondo luogo che se si ha l'arco $AB=A'B'$, sarà l'angolo $ACB=A'C'B'$. Imperocchè se questi angoli non fossero fra loro uguali, uno di essi, per esempio ACB, sarebbe maggiore dell'altro $A'C'B'$: facendo quindi in ACB l'angolo $AC\alpha=A'C'B'$, per ciò che si è dimostrato, sarà l'arco $A\alpha=A'B'$. Ma per supposizione $AB=A'B'$: adunque $A\alpha=AB$; cioè la parte uguale al tutto, lo che è assurdo. Non possono dunque gli angoli ACB, $A'C'B'$ non essere fra loro uguali.

309. *Nel medesimo cerchio o in cerchi uguali gli angoli al centro che stanno fra loro come due numeri interi, stanno eziandio come gli archi compresi fra i loro lati.*

Supponiamo che nei due cerchi uguali $ABDA$, $A'B'D'A'$ (*fig. 60.*ª) gli angoli ACB, $A'C'B'$ sieno fra loro come il numero intero m sta al numero intero n; supponiamo cioè che l'angolo I, il quale la fa da unità di misura, sia contenuto esattamente m volte nell'angolo ACB, ed n volte nell'angolo $A'C'B'$. Gli angoli parziali $AC\alpha$, $\alpha C\beta$, $\beta C\gamma$, ... $A'C'\alpha'$, $\alpha'C'\beta'$, $\beta'C'\gamma'$, ... essendo tutti uguali fra loro, saranno (308) altresì uguali fra loro gli archi parziali $A\alpha$, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, ... $A'\alpha'$, $\alpha'\beta'$, $\beta'\gamma'$, ... e quindi tutto l'arco AB starà a tutto l'arco $A'B'$ nella ragione medesima del numero m al numero n. Adunque $ACB:A'C'B'=AB:A'B'$.

Reciprocamente, se gli archi AB, $A'B'$ stessero fra loro come i numeri interi m, n, gli angoli ACB, $A'C'B'$ starebbero fra loro come i medesimi numeri, e per conseguenza si otterrebbe sempre $ACB:A'C'B'=AB:A'B'$.

Imperocchè gli archi parziali $A\alpha$, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, ... $A'\alpha'$, $\alpha'\beta'$, $\beta'\gamma'$, ... essendo uguali, uguali altresì saranno (308) gli angoli parziali $AC\alpha$, $\alpha C\beta$, $\beta C\gamma$, ... $A'C'\alpha'$, $\alpha'C'\beta'$, $\beta'C'\gamma'$, ...

310. Ma qualunque sia il rapporto dei due angoli ACB, $A'C'B'$ (*fig. 61.*ª) sarà sempre $ACB:A'C'B'=AB:A'B'$.

Infatti prendendo nell'angolo maggiore ACB una parte $AC\alpha=A'C'B'$, se questa proporzione non ha luogo, starà l'angolo ACB all'angolo $AC\alpha$ come l'arco AB sta ad un arco maggiore o minore di $A\alpha$: supponiamolo primieramente maggiore di $A\alpha$, e rappresentiamolo con $A\beta$, avremo

$$ACB:AC\alpha=AB:A\beta.$$

Ora immaginando l'arco AB diviso in parti uguali, ciascuna delle quali sia minore di $\alpha\beta$, dovrà almeno uno dei punti di divisione cadere tra α e β. Sia γ questo punto; conducendo il raggio $C\gamma$, i due archi AB, $A\gamma$ staranno fra loro come due numeri interi, e quindi (309)

$$ACB:AC\gamma=AB:A\gamma.$$

Paragonando queste due proporzioni una con l'altra, ed osservando che gli antecedenti sono i medesimi, se ne conchiuderà che i conseguenti sono proporzionali, e che perciò

$$AC\alpha:AC\gamma=A\beta:A\gamma.$$

Ma essendo l'arco $A\gamma<A\beta$, perchè sussistesse questa proporzione, dovrebbe essere $AC\gamma<AC\alpha$: ora al contrario si ha $AC\gamma>AC\alpha$; è dunque impossibile

che l'angolo ACB all'angolo ACx stia come l'arco AB sta ad un arco maggiore di Ax.

Con un ragionamento del tutto simile al precedente dimostrerebbesi non potere l'angolo ACB stare all'angolo ACx come l'arco AB sta ad un arco minore di Ax. Si avrà dunque

$$ACB:ACx=AB:Ax.$$

Ma $ACx=A'C'B'$, $Ax=A'B'$. Dunque

$$ACB:A'C'B'=AB:A'B'.$$

Quindi generalmente potrà stabilirsi il teorema: *il rapporto di due angoli è lo stesso di quello degli archi compresi fra i loro lati, e descritti dai loro vertici come centri col medesimo raggio.*

311. *Essendo dato un angolo qualunque, se si suppone descritto un cerchio che abbia il suo centro al vertice di questo angolo, l'arco compreso fra i suoi lati potrà servirgli di misura.*

Sia l'angolo ACB (*fig. 62.ª*), il cui vertice C è il centro del cerchio $ABDA$. Dico essere la misura dell'angolo ACB la stessa che quella dell'arco AB. Non potendosi infatti paragonare fra loro che quantità della stessa natura, un angolo non potrà essere misurato che da un altro angolo, il quale si consideri come unità di misura; supponendo quindi che l'angolo MCN sia questa unità, la misura di ACB sarà $\frac{ACB}{MCN}$. Ora se prendiamo l'arco MN per unità di misura degli archi, il numero che esprimerà la misura dell'arco AB sarà $\frac{AB}{MN}$. dippiù pel teorema dimostrato nel numero precedente

$$\frac{ACB}{MCN}=\frac{AB}{MN}.$$

Adunque la misura di un qualunque angolo agguaglia la misura dell'arco compreso fra i suoi lati e descritto dal suo vertice come centro, prendendo per unità di misura di questo l'arco compreso fra i lati dell'angolo che ha servito di unità di misura per quello.

312. È dunque indifferente il misurare direttamente un angolo o l'arco compreso fra i suoi lati e descritto come sopra, ottenendosi in ambedue i modi un medesimo risultamento: se non che essendo molto più comodo il misurare un arco, è stato ormai universalmente convenuto di prendere per misura di un angolo l'arco compreso fra i suoi lati. Ora per unità di misura degli archi prendesi la 360.ᵐᵃ parte della intera circonferenza, e questa si chiama *grado*. In tal guisa allorchè si dice che un angolo è di 30 gradi, si dovrà intendere che questo angolo comprende fra i suoi lati $\frac{30}{360}$ della circonferenza descritta dal suo vertice.
Il grado come si avvertì nell'Aritmetica (68) si suddivide in 60 parti, che diciamo *minuti primi*; il minuto primo in 60 parti che chiamiamo *minuti secondi*; il minuto secondo in 60 *minuti terzi*; ec. L'angolo retto avendo per mi-

sura la quarta parte della circonferenza sarà secondo la succennata divisione di 90 gradi.

I moderni francesi dividono la quarta parte della circonferenza in 100 *gradi*, il grado in 100 *minuti primi*, il minuto primo in 100 *minuti secondi*, ec. La circonferenza intera resta in questo modo divisa in 400 gradi (*).

313. *L' angolo formato da una tangente e da una corda ha per misura la metà dell' arco che vien sotteso dalla corda.*

L' angolo BAE (*fig. 63.ª*) formato dalla corda AB e dalla tangente AE è uguale alla metà dell' arco ADB. Imperocchè conducendo i raggi CA, CB, l' angolo CAE sarà (302) retto, e quindi nel triangolo isoscele ABC, gli angoli alla base essendo (277) uguali, sarà (289. 2.°) l' angolo al vertice, cioè l' angolo $ACB = 2\,\text{retti} - 2CAB = 2CAE - 2CAB$. Donde l' angolo proposto $BAE = CAE - CAB = \frac{1}{2} ACB$. Ma l' angolo ACB ha (311. 312) per misura l' arco ADB; dunque l' angolo BAE avrà per misura la metà del medesimo arco ADB.

314. *L' angolo iscritto nel cerchio ha per misura la metà dell' arco compreso fra i suoi lati.*

Sia AIB (*fig. 64.ª*) questo angolo. Conducendo la tangente IE, i due angoli EIA, EIB, avranno (313) per misura la metà degli archi IDA, IDB. Ma l' angolo proposto $AIB = EIB - EIA$. Sarà dunque $\frac{1}{2} IDB - \frac{1}{2} IDA = \frac{1}{2} AB$ la misura dell' angolo AIB.

Quindi 1.° Tutti gli angoli ADB, AEB, AFB, ec. (*fig. 65.ª*) iscritti nel medesimo segmento di cerchio sono fra loro uguali.

2.° L' angolo iscritto nel semicerchio è retto, perchè ha per misura la quarta parte della circonferenza.

3.° L' angolo iscritto in un segmento maggiore della semicirconferenza è acuto, ed ottuso l' angolo iscritto nel segmento minore della semicirconferenza.

315. *L' angolo che ha il suo vertice nell' interno del cerchio, ha per misura la semisomma degli archi compresi fra i suoi lati e fra i prolungamenti di questi stessi lati.*

Sia AIB (*fig. 66.ª*) questo angolo; prolungando i suoi lati fino ad incontrare la circonferenza nei punti D ed E, e conducendo la corda AD, sarà esso esterno rapporto al triangolo ADI, e perciò (289. 1.°) uguale alla somma dei due angoli interni opposti ADB, DAE. La misura dunque dell' angolo AIB sarà uguale alla somma delle misure degli angoli ADB, DAE, sarà cioè $= \frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} DE = \frac{1}{2} (AB + DE)$.

316. *L' angolo formato da due secanti che s' incontrano fuori del cerchio ha per misura la semidifferenza degli archi compresi fra i suoi lati.*

(*) La prima divisione dicesi divisione sessagesimale, e la seconda *divisione centesimale*. La maggior parte delle tavole e degl' istrumenti essendo stati costruiti secondo la divisione sessagesimale, di questa ci serviremo in tutto il restante di questo corso. È facile per altro di passare da una di queste divisioni all' altra per essere il loro rapporto $= 360 : 400$.

Sia AFB (*fig.* 67.ª) questo angolo: conducendo la corda AE, l'angolo AEB esterno al triangolo AEF, sarà uguale alla somma dei due angoli AFB, EAD, sarà cioè $AEB = AFB + EAD$; donde si deduce $AFB = AEB - EAD$, e conseguentemente la misura dell'angolo AFB sarà uguale alla differenza delle misure degli angoli AEB, EAD, vale a dire ad $\frac{1}{2} AB - \frac{1}{2} DE = \frac{1}{2}(AB - DE)$.

317. Se la secante AF divenisse tangente al punto α, l'angolo αFB avrebbe ancora per misura la semidifferenza degli archi αAB, αDE; poichè conducendo la corda αE si ha l'angolo $\alpha EB = \alpha FB + F\alpha E$, e quindi $\alpha FB = \alpha EB - F\alpha E$. Ora l'angolo αEB ha per misura la metà dell'arco αAB (314), e l'angolo $F\alpha E$ ha per misura la metà dell'arco αDE (313). Adunque la misura dell'angolo αFB sarà $= \frac{1}{2}(\alpha AB - \alpha DE)$.

Finalmente se i due lati dell'angolo, che ha il vertice fuori del cerchio, sono due tangenti, come AF, e BF (*fig.* 68.ª), questo angolo avrà per misura la semidifferenza degli archi AMB e ANB. Conducendo infatti la corda AB, l'angolo $EAB = AFB + FBA$, e perciò l'angolo $AFB = EAB - FBA$. Ma la misura dell'angolo EAB è $= \frac{1}{2} AMB$, la misura dell'angolo FBA è $= \frac{1}{2} ANB$. Adunque la misura dell'angolo AFB sarà $= \frac{1}{2}(AMB - ANB)$.

CAPO XI.

DI ALCUNI PROBLEMI RELATIVI ALLE TEORIE FINORA ESPOSTE.

318. *Dividere una data linea retta in due parti uguali.*

Sia AB (*fig.* 69.ª) la retta data. Dai punti A, e B come centri, e con un raggio maggiore della metà di AB si descrivano due archi, i quali si sechino nel punto D; questo punto D sarà ugualmente distante dai punti A, e B: si segni nella stessa maniera al di sopra o al di sotto di AB un secondo punto E, il quale disti ugualmente dai punti A e B, e per i punti D, E si conduca la retta DE; questa retta dividerà in C la AB in due parti uguali.

Imperocchè ciascuno dei punti D, ed E distando ugualmente dalle estremità della data retta AB, dovranno (281. 4.°) ambedue trovarsi nella perpendicolare innalzata sopra la medesima AB dal suo punto medio. Ma per due punti dati non può passare che una sola linea retta (253). Sarà dunque la DE quella stessa perpendicolare che divide la AB in due parti uguali.

319. *Da un punto dato in una retta innalzare a questa retta una perpendicolare.*

Sia data la retta AB (*fig.* 70.ª) ed in essa il punto C, dal quale si voglia innalzare una perpendicolare alla medesima AB.

Si prendano i punti A' e B' ugualmente distanti dal punto dato C: quindi da questi punti come centri, e con un raggio maggiore di $A'C$ si descrivano due archi; questi si secheranno nel punto D: per i punti C e D si conduca la retta CD; dico essere CD la cercata perpendicolare.

Infatti il punto D, distando ugualmente dai punti A' e B', non può non appartenere (281. 4.°) alla perpendicolare innalzata dal punto medio C della retta $A'B'$. Ma per i punti C e D non può condursi altra retta diversa dalla CD (253); questa dunque è la cercata perpendicolare.

La costruzione medesima potrà servire a fare un angolo retto ACD in un dato punto C della data retta AB.

320. *Da un punto dato fuori di una retta abbassare a questa retta una perpendicolare.*

Sia data la retta indefinita AB (*fig.* 71.ª), e fuori di questa il punto D, dal quale faccia d' uopo abbassare una perpendicolare alla medesima AB.

Dal punto D come centro, e con un raggio sufficientemente grande si descriva un arco, il quale sechi la retta AB nei punti A' e B': da questi punti come centri, e con uno stesso raggio si descrivano due archi, i quali si sechino in H; la retta DC che dal punto D si conduce alla AB pel punto H, sarà la perpendicolare cercata.

Perocchè ciascuno dei due punti D ed H è ugualmente distante dai punti A' e B'; adunque la retta DC, la cui direzione viene determinata dai punti D ed H, sarà perpendicolare alla retta $A'B'$ nel suo punto medio.

321. *In un punto dato di una data retta, costruire un angolo uguale ad un altro angolo dato.*

Sia AB (*fig.* 72.ª) la retta data, ed in essa il punto C, nel quale cercasi costruire un angolo uguale al dato angolo HKI.

Dal vertice K dell' angolo dato HKI come centro, e con un raggio preso ad arbitrio, si descriva l' arco GL terminato ai lati dell'angolo medesimo: quindi dal punto C come centro, e col raggio $CD{=}KG$ si descriva l' arco indefinito DF: finalmente dal punto D come centro, e con un raggio uguale alla corda dell' arco GL si descriva un arco il quale tagli in E l' arco indefinito DF, e si congiunga CE; dico essere l' angolo ACE uguale all' angolo dato HKI.

Infatti i due archi DE, GL hanno per costruzione raggi uguali e corde uguali; essi dunque sono (298. 1.°) fra loro uguali, donde (308) l' angolo $ACE{=}HKI$.

322. *Dividere un dato angolo in due angoli uguali.*

Sia BAC (*fig.* 73.ª) l' angolo dato. Nei lati AB, AC di questo angolo si prendano due parti uguali AD, AE: dai punti D, E come centri, e col medesimo raggio si descrivano due archi, i quali si sechino scambievolmente nel punto F: congiungasi il punto A col punto F con la linea retta AF; dico che questa retta secherà l' angolo BAC in due angoli uguali BAF, CAF.

Conducendo infatti le rette DF, EF, i due triangoli ADF, AEF avranno i lati $AD{=}AE$, $DF{=}EF$, ed il lato AF comune; sarà dunque (276) il triangolo ADF uguale al triangolo AEF, e conseguentemente ancora l' angolo $BAF{=}CAF$.

323. *Descrivere sopra una data retta un triangolo equilatero.*

Sia AB (*fig.* 74.ª) la retta data. Dai punti A, B come centri, e col raggio uguale alla AB, si descrivano due archi, i quali si sechino nel punto C: dal

punto C si conducano le rette CA, CB; il triangolo ABC sarà il cercato triangolo equilatero.

Perocchè dalla costruzione già fatta agevolmente dimostrasi essere $AB = BC = CA$.

Con una somigliante costruzione si può descrivere sopra una data retta un triangolo isoscele. Per ciò fare gli archi da descriversi debbono bensì avere fra loro uguali i raggi, ma però maggiori o minori della retta data, avvertendo inoltre di non mai prendere questi raggi minori della metà della medesima retta (260).

324. *Dati i tre lati di un triangolo descrivere il triangolo.*

Sieno A, B, C (*fig.* 75.ª) questi tre lati. Si conduca una retta indefinita, nella quale si prenda una parte $DE = A$: dal punto D come centro, e con un raggio uguale al secondo lato B, si descriva un arco: dal punto E come centro, e con un raggio uguale al terzo lato C, si descriva un altro arco il quale sechi il primo nel punto F: congiungasi il punto F con i punti D, E; sarà DEF il triangolo cercato.

Dovendo (260) in ogni triangolo uno dei lati essere minore della somma degli altri due, agevolmente comprendesi essere la soluzione di questo problema impossibile, ove la somma di due qualunque dei tre lati dati fosse minore del terzo. Ed in verità gli archi in tal caso non si secherebbero.

325. *Per un punto dato condurre una parallela ad una retta data.*

Sia A (*fig.* 76.ª) il punto dato, e BC la retta data. Dal punto A come centro, e con un raggio sufficientemente grande, si descriva l'arco indefinito DF il quale sechi in F la retta BC: quindi dal punto F come centro, e col medesimo raggio si descriva l'arco AG: si prenda da ultimo $FH = AG$, e si conduca la retta AH; sarà questa la parallela cercata.

Congiungendo infatti il punto A col punto F con la retta AF, gli angoli alterni-interni AFG, FAH sono uguali (308), e conseguentemente la retta AH sarà (282. 2.°) parallela alla data retta BC.

326. *Dati i due lati adiacenti di un parallelogrammo con l'angolo dai medesimi compreso, descrivere il parallelogrammo.*

Sieno A, B (*fig.* 77.ª) i due lati. Conducendo la retta indefinita DE prendasi in essa la parte $DE = A$: facciasi (321) al punto D l'angolo GDE uguale al dato angolo C, e si prenda $DG = B$: dal punto G conducasi (325) la GF parallela alla DE, e dal punto E la EF parallela alla DG; sarà il quadrilatero $DEFG$ il cercato parallelogrammo.

Infatti per costruzione i suoi lati opposti sono fra loro paralleli; adunque (261) ec.

327. *Trovare il centro di un cerchio, o di un arco dato.*

Nella circonferenza del dato cerchio, o nell'arco dato si segnino ad arbitrio i tre punti A, B, C (*fig.* 78.ª): si conducano quindi le corde AB, BC, le quali si dividano per metà (318) nei punti D, E: da questi punti (319) s'innalzino le perpendicolari DO, EO alle succennate corde AB, BC; il punto O, in cui queste perpendicolari s'incontrano sarà il centro cercato.

Imperciocchè questo centro deve (300. 1.°) nel medesimo tempo trovarsi in DO ed in EO; si troverà dunque nella loro comune intersezione O.

Si farà la costruzione medesima ove si cerchi di far passare una circonferenza di cerchio per i tre punti dati A, B, C non in linea retta (304).

328. *Per un punto dato condurre una tangente ad una data circonferenza di cerchio.*

Se il punto A (*fig.* 79.ª) è dato nella circonferenza, si conduca il raggio CA: quindi dal punto A s'innalzi (319) la perpendicolare AD al raggio CA; sarà (302) AD la tangente cercata.

Se poi il punto A (*fig.* 80.ª) si trova fuori della circonferenza, si congiunga il centro C col punto A con la retta CA, la quale si divida per metà (318) in O: da questo punto O come centro, e col raggio OC si descriva una circonferenza, la quale sechi la circonferenza data nel punto D: si conduca AD; sarà questa la tangente cercata.

Infatti se si conduce il raggio CD, l'angolo CDA iscritto nel semicerchio è un angolo retto (314. 2.°); è dunque AD perpendicolare alla estremità del raggio CD, e perciò tangente alla circonferenza nel punto D.

329. *Sopra una data linea retta descrivere un segmento di cerchio capace di un dato angolo, ossia un segmento tale che tutti gli angoli in esso iscritti sieno uguali ad un angolo dato.*

Sia AB (*fig.* 81.ª) la retta data, e C l'angolo dato. Si prolunghi AB di una lunghezza a piacere BD: si faccia (321) nel punto B l'angolo $EBD{=}C$: dal punto B si elevi (319) sopra EF la perpendicolare BO, e dal punto medio G di AB s'innalzi la perpendicolare GO alla medesima AB: quindi dal punto O d'incontro delle due perpendicolari come centro, e col raggio OB, si descriva un cerchio; sarà AMB il segmento cercato.

Perocchè essendo OB un raggio perpendicolare alla retta EF nel punto B, sarà (302) EF tangente, e perciò (313) l'angolo ABF avrà per misura la metà dell'arco ANB. Ma l'angolo iscritto AMB ha pure per misura la metà dell'arco ANB (314). Adunque sarà l'angolo $AMB{=}ABF{=}EBD{=}C$; dunque tutti gli angoli iscritti nel segmento AMB sono uguali all'angolo dato C.

CAPO XII.

DELLA MISURA DELLE AREE DEI POLIGONI.

330. ***Area*** o ***superficie*** di una figura piana qualunque sono in Geometria termini presso a poco sinonimi. L'area però indica più particolarmente la quantità superficiale della figura, in quanto è essa misurata, ovvero paragonata ad altre superficie.

Le figure poi diconsi ***equivalenti*** allorchè le loro aree sono uguali, quantunque nel resto sieno esse affatto dissimili. Così, per esempio, se l'area di un triangolo agguaglia quella di un rettangolo, il triangolo si dirà in tal caso equivalente al rettangolo, quantunque la figura triangolare sia del tutto dissimile alla rettangolare.

La denominazione di figure uguali viene esclusivamente adoperata per quelle le quali possono perfettamente coincidere in tutti i loro punti, allorchè si soprappongono l'una all'altra: tali sono per esempio due cerchi i quali si descri-

vano con raggi ugnali, due triangoli che abbiano i tre lati rispettivamente ugnali, ec.

331. *L'altezza* di ciascuna figura è la linea retta che dalla cima della figura viene abbassata perpendicolarmente alla base. Così l'altezza di un parallelogrammo qualunque *ABCD* (*fig. 82.ª*) è la perpendicolare *EF* che misura la distanza dei due lati opposti *AB*, *DC* presi per basi: l'altezza di un qualsivoglia triangolo *ABC* (*fig. 83.ª*) è la perpendicolare *AD* che dal vertice *A* si abbassa sopra l'opposto lato *BC* preso per base: l'altezza di un trapezio *ABCD* (*fig. 84.ª*) è la perpendicolare *EF* che misura la distanza dei due lati paralleli *AB*, *DC*: ec. . .

332. *I parallelogrammi che hanno uguali basi ed uguali altezze sono equivalenti.*

Sia *AB* (*fig. 85.ª 86.ª*) la base comune dei due parallelogrammi *ABCD*, *ABEF*; se questi si suppongono avere ancora la stessa altezza, è chiaro che le loro basi superiori *DC*, *FE* saranno situate sopra una medesima retta *FC* parallela ad *AB*. Ciò posto, i due triangoli *ADF*, *BCE* sono (270) uguali fra loro; perocchè in essi si ha (288) l'angolo *FAD*=*EBC*, e dippiù per la natura dei parallelogrammi (292) il lato *AD*=*BC*, ed il lato *AF*=*BE*. Ora dal trapezio *ABCF* togliendo il triangolo *ADF* resta il parallelogrammo *ABCD*, e dal medesimo trapezio *ABCF* togliendo l'altro triangolo *BCE* resta il parallelogrammo *ABEF*. Adunque i due parallelogrammi *ABCD*, *ABEF* che hanno la medesima base e la medesima altezza sono equivalenti.

Col medesimo discorso si dimostrerà che un qualunque parallelogrammo *ABCD* (*fig. 87.ª*) è equivalente al rettangolo *ABEF* della medesima base e della medesima altezza.

333. Abbiasi il triangolo *ABC* (*fig. 88.ª*); conducendo le rette *CD*, *AD* parallele ai lati *AB*, *BC*, il parallelogrammo *ABCD* che quindi ne nascerà, avrà comune col triangolo *ABC* la base e l'altezza. Ora i due triangoli *ABC*, *ACD* componenti l'intero parallelogrammo *ABCD*, sono uguali fra loro; adunque il triangolo *ABC* sarà la metà del parallelogrammo *ABCD*. Potremo quindi stabilire la seguente proposizione: *ogni triangolo è la metà del parallelogrammo che ha la medesima base e la medesima altezza.*

Da questa proposizione deduccsi (332) primieramente che ogni triangolo è la metà del rettangolo che ha la medesima base e la medesima altezza; e dippiù che tutti i triangoli *ABC*, *ABD*, *ABE*, ec. (*fig. 89.ª*) che hanno la medesima base *AB* ed i loro vertici sopra la stessa retta *CF* parallela alla *AB*, sono equivalenti.

334. *Due rettangoli della medesima altezza stanno fra loro come le rispettive basi.*

Sieno *ABCD*, *ABEF* (*fig. 90.ª*) due rettangoli che hanno la medesima altezza *AB*: dico ch'essi stanno fra loro come le rispettive basi *BC*, *BE*.

Supponendo che queste basi sieno commensurabili fra loro, e che stiano per esempio come i numeri interi 7 e 4, è chiaro che dividendo la base *BC* in sette parti uguali, la base *BE* conterrà quattro di queste parti; quindi innalzando da ciascun punto di divisione una perpendicolare alla base, il rettangolo *ABCD* resterà diviso in sette rettangoli uguali (332), dei quali quattro ne conterrà il rettangolo *ABEF*. Laonde supponendo $BC:BE=7:4$, sarà pure $ABCD:ABEF=7:4$ e per conseguenza $ABCD.ABEF=BC:BE$. Il ragionamento medesimo è applicabile ad ogni altro rapporto diverso da quello di 7:4; laonde

qualunque sia il rapporto delle basi BC, BE, purchè commensurabile, si avrà sempre la proporzione

$$ABCD:ABEF=BC:BE.$$

Ma siffatta proporzione ha luogo ancorchè le basi BC, BE (*fig. 91.ª*) sieno incommensurabili fra loro. Infatti concedendo per poco che in questo caso non sia vera la succennata proporzione, restando gli stessi tre primi termini, il quarto sarà maggiore o minore di BE. Supponiamolo primieramente maggiore ed uguale per esempio a BG; sarà

$$ABCD:ABEF=BC:BG.$$

Ora se la BC si divida in parti uguali, ciascuna delle quali sia minore di EG, almeno un punto di divisione cadrà fra i punti E, e G. Sia I questo punto; dal punto I innalzando sopra di BC la perpendicolare IK, le basi BC, BI essendo fra loro commensurabili, daranno luogo alla seguente proporzione

$$ABCD:ABIK=BC:BI.$$

Paragonando questa proporzione con la precedente, ne risulterà

$$ABEF:ABIK=BG:BI.$$

Ma il rettangolo $ABEF$ è minore del rettangolo $ABIK$; dovrebbe dunque, perchè sussistesse questa ultima proporzione, essere la retta BG minore della retta BI; ora al contrario essa è maggiore. Adunque è impossibile che si abbia $ABEF:ABIK=BG:BI$, e per conseguenza è eziandio impossibile la proporzione $ABCD:ABEF=BC:BG$. Con un ragionamento affatto simile si dimostrerebbe che il quarto termine della proporzione non può essere minore di BE; adunque esso dovrà necessariamente aggnagliare BE. Adunque due rettangoli ec. . .

335. *Due rettangoli qualunque stanno fra loro come i prodotti delle loro basi per le corrispondenti altezze.*

Si abbiano i due rettangoli $ABCD$, $AEFG$ (*fig. 92.ª*): dopo di avere soprapposto uno di questi rettangoli all' altro, e fatto coincidere uno dei loro angoli retti, si prolunghino i lati EF, GF in H, ed I: i due rettangoli $ABCD$, $AEHD$ hanno la medesima altezza AD, essi perciò stanno (334) fra loro come le basi AB, AE: similmente i due rettangoli $AEHD$, $AEFG$ avendo l' altezza medesima AE, stanno fra loro come le basi AD, AG. Adunque

$$ABCD:AEHD=AB:AE,$$

$$AEHD:AEFG=AD:AG.$$

Moltiplicando in corrispondenza queste due proporzioni, ed osservando che nella proporzione che da siffatta moltiplicazione risulta, il termine $AEHD$ può omettersi, perchè fattore comune all' antecedente ed al conseguente della prima ragione, otterremo

$$ABCD:AEFG=AB\times AD:AE\times AG.$$

336. *L'area di un qualunque rettangolo ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza.*

La linea retta AE (*fig.* 93.ª) essendo presa per la unità lineare, l'area del quadrato $AEFG$ sarà la unità di area. Ora è chiaro dalla semplice ispezione della figura, che l'area del rettangolo $ABCD$ contiene tante volte l'area del quadrato $AEFG$, quante unità si contengono nel prodotto che risulta dal moltiplicare il numero delle unità lineari contenute nella base AB, pel numero delle unità lineari contenute nell'altezza AD. Nel caso presente questi numeri sono 5 e 4, ed il loro prodotto 20 esprime infatti il numero dei quadrati $AEFG$ contenuti nel rettangolo $ABCD$ (*).

Se la unità lineare non si contenesse un numero esatto di volte nella base e nell'altezza del rettangolo, l'area di questo rettangolo sarebbe ugualmente espressa dal prodotto della sua base per la sua altezza. Perocchè paragonando i due rettangoli $ABCD$, $AEFG$, abbiamo la proporzione (335)

$$ABCD:AEFG=AB\times AD:AE\times AG.$$

Ora prendendo $AE=AG=1$, prendendo cioè il quadrato $AEFG$ per unità di misura, si ha

$$ABCD:AEFG=AB\times AD:1.$$

Quindi il prodotto $AB\times AD$ conterrà tante unità e parti della unità, quante volte l'area del rettangolo $ABCD$ conterrà l'area del quadrato $AEFG$. Il prodotto adunque della base per l'altezza di un rettangolo, esprimerà in tutti i casi l'area del rettangolo.

Un quadrato non è altro che un rettangolo, il quale ha la base uguale all'altezza; quindi ***l'area di un quadrato è espressa dalla seconda potenza di uno dei suoi lati.***

337. *L'area di un parallelogrammo qualunque ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza.*

Infatti un qualunque parallelogrammo è equivalente ad un rettangolo che ha la medesima base e la medesima altezza (332). Ma l'area di un qualsivoglia rettangolo si misura dal prodotto della sua base per la sua altezza (336). Adunque ec.

Da questa proposizione deducesi che ***i parallelogrammi della medesima base stanno fra loro come le rispettive altezze, ed i parallelogrammi della medesima altezza stanno fra loro come le rispettive basi.*** Infatti dinotando con B, B' le basi, e con A, A' le altezze di due parallelogrammi qualunque P, P', avremo

$$P:P'=A.B:A'.B'.$$

Ora supponendo $B=B'$, si ha $P:P'=A:A'$, e facendo $A=A'$, si ottiene $P:P'=B:B'$. Dunque ec.

(*) La parola *prodotto* non ha dunque qui il senso aritmetico consueto; poichè in Aritmetica il prodotto è sempre della stessa natura del moltiplicando, o in generale di uno dei fattori, mentre adesso è di una specie tutta diversa da quella dei fattori; poichè le sue unità esprimono superficie e non linee. Sarà ben fatto il rileggere la nota del numero 19.

338. *L' area di un triangolo qualunque ha per misura la metà del prodotto della sua base per la sua altezza.*

Perocchè un qualunque triangolo è la metà del parallelogrammo che ha la medesima base e la medesima altezza (333). Ma l' area di questo parallelogrammo è misurata dal prodotto della sua base per la sua altezza (337). Adunque ec.

Quindi conseguita che *i triangoli della medesima base stanno fra loro come le rispettive altezze, ed i triangoli della medesima altezza stanno fra loro come le rispettive basi.* Poichè se B, B' esprimano le basi, ed A, A' le altezze di due triangoli qualunque T, T', avremo

$$T:T'=\frac{A.B}{2}:\frac{A'.B'}{2};$$

e perciò sarà $T:T'=A:A'$, se $B=B'$; e $T:T'=B:B'$, se $A=A'$.

339. *L' area di un trapezio è uguale alla metà del prodotto della sua altezza per la somma dei due lati paralleli.*

Il trapezio $ABCD$ (*fig. 94.ª*), conducendo la diagonale DB, si divide nei due triangoli DAB, BDC, i quali hanno le altezze uguali fra loro ed alla EF, altezza del trapezio $ABCD$, e dei quali il primo ha AB per base ed il secondo DC. Ora l' area del triangolo DAB è uguale (338) a $\frac{1}{2}EF\times AB$, e l' area del triangolo BDC è uguale a $\frac{1}{2}EF\times DC$. Adunque la somma di questi due triangoli, o l' area del trapezio è uguale a

$$\frac{1}{2}EF\times AB+\frac{1}{2}EF\times DC=\frac{1}{2}EF(AB+DC).$$

In generale un poligono qualunque si può per mezzo delle diagonali risolvere in triangoli; in tal guisa si potrà sempre ed agevolmente pel citato numero 338 ottenere la misura della sua area, la quale agguaglia la somma delle aree di tutti i triangoli.

CAPO XIII.

DI ALCUNI TEOREMI RELATIVI ALLA TEORIA DELLE AREE ESPOSTA NEL CAPO PRECEDENTE.

340. *Se una retta sia secata in qualunque modo in due parti, il quadrato che si costruisce sopra la intera retta, è uguale ai quadrati che si costruiscono sopra le due parti, più il doppio rettangolo contenuto dalle medesime parti.*

Essendo cioè la retta AB (*fig.* 95.ª) divisa in qualunque modo nel punto F, sarà

$$(AB)^2=(AF+FB)^2=(AF)^2+(FB)^2+2AF\times FB.$$

Si costruisca infatti il quadrato $ABCD$; questo quadrato, prendendo nel lato AD $AG=AF$, e dal punto G conducendo GI parallela ad AB, come ancora dal punto F tirando FE parallela ad AD, resterà diviso nelle quattro parti $AFHG$, $HICE$, $FBIH$, $GHED$. Ora la prima $AFHG$ è il quadrato fatto sopra AF, essendo per costruzione $AG=AF$; la seconda $HICE$ è il quadrato fatto sopra FB, poichè essendo $AB-AF=AD-AG$, cioè $FB=GD$, e (292) $FB=HI$, $GD=HE$, è pure $HI=HE$; finalmente ciascuna delle altre due parti $FBIH$, $GHED$ è il rettangolo che ha per misura il prodotto $AF\times FB$. Adunque ec.

Questa proposizione concorda benissimo con quella già dimostrata nell' Algebra (123) per la formazione del quadrato del binomio $p+q$, la quale viene indicata dalla formola

$$(p+q)^2=p^2+q^2+2pq.$$

341. *Il quadrato che si costruisce sopra una retta, che è la differenza di due altre linee rette, è uguale ai quadrati che si costruiscono sopra queste due rette, meno il doppio rettangolo contenuto dalle medesime.*

Così la retta AB (*fig.* 96.ª) esprimendo la differenza delle due AC, BC, sarà

$$(AB)^2=(AC-BC)^2=(AC)^2+(BC)^2-2AC\times BC.$$

Si costruisca il quadrato $ACHF$ sopra AC; in AF si prenda $AE=AB$; pel punto B si conduca BG parallela a CH, e pel punto E EI parallela ad FH; finalmente sopra BC si faccia il quadrato $BCKL$. Ciò posto, i due rettangoli $EFHI$, $DIKL$ hanno ciascuno per misura $AC\times BC$; togliendoli da tutta la figura $ABLKHFA$, la quale ha per valore $(AC)^2+(BC)^2$, si avrà per residuo il quadrato $ABDE$, cioè $(AB)^2$. Adunque ec.

Questa proposizione concorda con la formola algebrica

$$(p-q)^2=p^2+q^2-2pq.$$

342. *Il rettangolo contenuto dalla somma e dalla differenza di due rette, agguaglia la differenza dei quadrati di queste medesime rette.*

Sopra le due rette AB, AC (*fig.* 97.ª) si facciano i quadrati $ABIF$, $ACDE$; quindi prolungando AB di una quantità $BK=CB$, si compisca il rettangolo $AKLE$, ed il quadrato $DHIG$. Da siffatta costruzione si rende chiaro essere il rettangolo $AKLE=ABHE+BKLH=ABHE+EDGF=ABIF-$ $-DHIG$. Ma $AKLE=AK\times AE=(AB+CB)(AB-CB)$, $ABIF=(AB)^2$, $DHIG=(CB)^2$. Sarà dunque

$$(AB+CB)(AB-CB)=(AB)^2-(CB)^2.$$

Questa espressione corrisponde (86) alla formola algebrica

$$(p+q)(p-q)=p^2-q^2.$$

343. *In un triangolo rettangolo il quadrato fatto sopra la ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati fatti sopra i due cateti.*

Si abbia il triangolo ABC (*fig.* 98.ª) rettangolo in C: sopra i suoi tre lati AB, BC, CA si costruiscano i quadrati $ABDE$, $BCGF$, $CAIH$: quindi dal vertice C dell' angolo retto sopra la ipotenusa AB si abbassi la perpendicolare CK, la quale prolunghisi in L; e finalmente si conducano le due diagonali CE, IB.

Nei due triangoli ABI, ACE si ha il lato $AB=AE$, il lato $AI=AC$, e l' angolo $IAB=CAE$, poichè ambedue questi angoli si compongono dell'angolo retto e dell' angolo CAB; adunque (270) il triangolo ABI è uguale al triangolo ACE. Ora (233) il triangolo ABI è la metà del quadrato $CAIH$; il triangolo ACE è la metà del rettangolo $AKLE$; sarà dunque il quadrato $CAIH$ equivalente al rettangolo $AKLE$. Nella medesima guisa dimostrasi il quadrato $BCGF$ equivalente al rettangolo $KBDL$. Ma i due rettangoli $AKLE$, $KBDL$ presi insieme agguagliano il quadrato $ABDE$. Adunque il quadrato $ABDE$ fatto sopra la ipotenusa AB, è uguale alla somma dei quadrati $BCGF$, $CAIH$ fatti sopra i due cateti BC, CA: cioè

$$(AB)^2=(BC)^2+(CA)^2.$$

Quindi 1.° Il quadrato di uno dei due cateti è uguale al quadrato della ipotenusa, meno il quadrato dell'altro cateto: cioè

$$(BC)^2=(AB)^2-(CA)^2, \text{ ovvero } (CA)^2=(AB)^2-(BC)^2.$$

2.° In un quadrato qualunque $ABCD$ (*fig.* 99.ª) conducendo la diagonale AC, si avrà $(AC)^2=(AB)^2+(BC)^2$. Ma $AB=BC$. Dunque $(AC)^2=$ $=2(AB)^2$, e (243) $(AC)^2:(AB)^2=2:1$, donde $AC:AB=\sqrt{2}:1$.

3.° Il quadrato $ABDE$ (*fig.* 98.ª), e i due rettangoli $AKLE$, $KBDL$, hanno la medesima altezza; essi dunque (334) stanno fra loro come le basi AB, AK, KB. Laonde ai due rettangoli sostituendo i quadrati che sono loro equivalenti, si avrà

$$(AB)^2:(AC)^2:(CB)^2=AB:AK:KB.$$

344. *In un triangolo qualunque il quadrato che si costruisce sopra il lato opposto ad un angolo acuto, è uguale ai quadrati fatti sopra i due lati che comprendono l'angolo acuto, meno il doppio rettangolo contenuto da uno di questi lati, da quello cioè nel quale cade dal vertice dell'angolo opposto la perpendicolare, e dalla retta compresa fra il piede della perpendicolare ed il vertice dell'angolo acuto.*

Nel triangolo ABC (*fig. 100.ª 101.ª*) se l'angolo in C è acuto, conducendo sopra il lato BC dal vertice A dell'angolo opposto la perpendicolare AD, si avrà

$$(AB)^2=(AC)^2+(BC)^2-2BC\times DC.$$

Se la perpendicolare AD cade dentro il triangolo ABC, poichè $BD=$ $=BC-DC$, si avrà (341) $(BD)^2=(BC)^2+(DC)^2-2BC\times DC$; quindi aggiugnendo ad ambedue i membri di questa uguaglianza il quadrato di AD, si otterrà $(AD)^2+(BD)^2=(BC)^2+(AD)^2+(DC)^2-2BC\times DC$, cioè (343) $(AB)^2=$ $=(BC)^2+(AC)^2-2BC\times DC$.

Che se la perpendicolare AD cade fuori del triangolo ABC, sarà $BD=$ $=DC-BC$, e quindi $(BD)^2=(DC)^2+(BC)^2-2DC\times BC$. Aggiugnendo ad ambedue i membri della equazione il quadrato di AD, si dedurrà eziandio $(AB)^2=(BC)^2+(AC)^2-2BC\times DC$.

345. *Nei triangoli ottusangoli il quadrato che si costruisce sopra il lato opposto all'angolo ottuso, è uguale ai quadrati dei lati che comprendono l'angolo ottuso, più il doppio rettangolo contenuto da uno di questi lati, da quello cioè nel quale prolungato cade la perpendicolare dal vertice dell'angolo opposto, e dalla retta compresa fra il piede della perpendicolare ed il vertice dell'angolo ottuso.*

La perpendicolare che dal vertice di uno dei due angoli acuti del triangolo ottusangolo si abbassa sopra il lato opposto, non può non cadere fuori dello stesso triangolo. Infatti se la perpendicolare, che dal vertice dell'angolo acuto A (*fig. 102.ª*) del triangolo ABC ottusangolo in B si abbassa sopra il lato BC, cadesse nel punto D, il triangolo ABD avrebbe ad un tempo stesso l'angolo retto ADB, e l'angolo ottuso B, lo che è impossibile (289. 4.°).

Cadendo dunque la perpendicolare AD (*fig. 101.ª*) fuori del triangolo ABC, si avrà $DC=BC+BD$, e quindi (340) $(DC)^2=(BC)^2+(BD)^2+2BC\times BD$. Aggiugnendo ad ambedue i membri della equazione il quadrato di AD, risulterà

$$(AC)^2=(BC)^2+(AB)^2+2BC\times BD.$$

346. Si abbia un qualunque triangolo ABC (*fig. 103.ª*); congiungendo il vertice A col punto medio E della base BC per mezzo della retta AE, si avrà

$$(AB)^2+(AC)^2=2(AE)^2+2(BE)^2.$$

Infatti, abbassando la perpendicolare AD sopra la base BC, nel triangolo ABE sarà (344)

$$(AB)^2=(AE)^2+(BE)^2-2BE\times DE,$$

e nel triangolo AEC si otterrà (345)

$$(AC)^2 = (AE)^2 + (EC)^2 + 2EC \times DE.$$

Queste due equazioni sommate insieme, poichè $BE = EC$, daranno

$$(AB)^2 + (AC)^2 = 2(AE)^2 + 2(BE)^2.$$

Quindi conseguita che *in un qualunque parallelogrammo la somma dei quadrati dei lati, agguaglia la somma dei quadrati delle diagonali.*

Perocchè nel parallelogrammo $ABCD$ (*fig. 41.ª*) le diagonali AC, BD secandosi scambievolmente in due parti uguali nel punto E (295), perciò il triangolo ADC darà $(AD)^2+(DC)^2=2(DE)^2+2(AE)^2$, ed il triangolo ABC darà parimenti $(AB)^2+(BC)^2=2(BE)^2+2(AE)^2$. Laonde aggiugnendo la prima alla seconda equazione, si otterrà

$$(AB)^2+(BC)^2+(AD)^2+(DC)^2=4(BE)^2+4(AE)^2=(2BE)^2+(2AE)^2=$$
$$=(BD)^2+(AC)^2.$$

CAPO XIV.

DELLE RETTE PROPORZIONALI E DELLE FIGURE SIMILI.

347. Due figure rettilinee si dicono *simili* allorchè hanno gli angoli rispettivamente uguali, e proporzionali i lati *omologhi*, quei lati cioè che nelle due figure hanno la medesima posizione, o che sono adiacenti agli angoli uguali. Questi medesimi angoli si chiamano pure angoli *omologhi*.

In due cerchi differenti si chiamano ancora *archi simili*, *settori simili*, *segmenti simili* quelli che corrispondono ad angoli al centro uguali.

348. *In un qualsivoglia triangolo la retta che si conduce parallelamente ad uno qualunque dei suoi tre lati, seca gli altri due lati in parti proporzionali.*

Così se nel triangolo ABC (*fig. 104.ª*) si conduca la retta DE parallelamente al lato BC, io dico che si avrà

$$AD:DB = AE:EC.$$

Si conducano BE, DC: i due triangoli DEB, DEC poggiano sopra la medesima base DE, e, trovandosi tra le medesime parallele DE, BC, hanno eziandio la stessa altezza; essi adunque sono equivalenti (333). Ciò posto, i triangoli ADE, DEB, il cui vertice comune è E, hanno la medesima altezza: essi adunque stanno fra loro come le rispettive basi AD, DB (338). Inoltre i trian-

goli ADE, DEC, il cui vertice comune è D, hanno pure la medesima altezza e stanno fra loro come le rispettive basi AE, EC. Adunque

$$ADE:DEB=AD:DB,$$

$$ADE:DEC=AE:EC.$$

Ma essendo il triangolo DEB equivalente al triangolo DEC, le prime ragioni di queste due proporzioni sono uguali fra loro ; per conseguenza uguali fra loro saranno altresì le seconde ragioni, donde

$$AD:DB=AE:EC.$$

Quindi 1.° (246)

$$AD+DB:AD=AE+EC:AE, \text{ cioè } AB:AD=AC:AE,$$

$$AD+DB:DB=AE+EC:EC, \text{ ossia } AB:DB=AC:EC.$$

2.° Se a traverso di due rette AB, CD (*fig.* 105.ª) si conducano quante parallele si vogliano AC, EF, GH, IK, LM, ec. . . . , queste parallele divideranno le due AB, CD in parti proporzionali, si avrà cioè

$$AE:CF=EG:FH=GI:HK=IL:KM=\text{ec.} \ldots$$

Infatti prolungando le rette AB, CD fino ad incontrarsi nel punto O, nel triangolo OEF, poichè AC è parallela ad EF, si avrà (1.°)

$$OE:AE=OF:CF, \text{ donde } OE:OF=AE:CF.$$

D' altronde nel triangolo OGH, poichè EF è parallela a GH, si ha

$$OE:EG=OF:FH, \text{ donde } OE:OF=EG:FH.$$

Adunque sarà

$$AE:CF=EG:FH.$$

Nella medesima guisa si dimostrerebbe

$$EG:FH=GI:HK=IL:KM=\text{ec.} \ldots$$

349. *La retta che seca due lati di un triangolo in parti proporzionali, è parallela al terzo lato.*

Nel triangolo ABC (*fig.* 106.ª) se la retta DE seca in parti proporzionali i due lati AB, AC, in modo che stia $AD:DB=AE:EC$, dico essere essa parallela al terzo lato BC.

Imperocchè suppongasi per poco che la DE non sia parallela al lato BC; adunque un' altra DF sarà parallela a BC, e quindi pel teorema dimostrato nel numero precedente si avrà $AD:DB=AF:FC$. Ma per supposizione $AD:DB=$ $=AE:EC$. Dunque $AF:FC=AE:EC$, donde $AF:AE=FC:EC$. Or questa ultima proporzione è evidentemente assurda. Adunque la retta parallela a BC

che si conduce pel punto D, non può essere diversa dalla DE, e per conseguenza la DE è questa parallela.

Questa stessa conclusione avrebbe luogo, ove si supponesse $AB:AD=AC:AE$. Infatti questa proporzione dà $AB-AD:AD=AC-AE:AE$, ossia $DB:AD=EC:AE$, donde $AD:DB=AE:EC$.

350. *La retta che seca in due parti uguali l'angolo di un triangolo, divide il lato opposto in parti proporzionali ai lati adiacenti. Reciprocamente, la retta, che tirata dal vertice di un angolo di un triangolo, seca il lato opposto in parti proporzionali ai lati adiacenti, divide l'angolo in due angoli uguali.*

Si abbia il triangolo ABC (*fig. 107.ª*), nel quale suppongasi la retta AD dividere l'angolo BAC in due parti uguali; dico essere

$$BD:DC=AB:AC.$$

Conducendo infatti pel punto B la retta BE parallela alla AD fino ad incontrare in E il prolungamento del lato CA, si avrà (348)

$$BD:DC=EA:AC.$$

Ma $EA=AB$. Adunque

$$BD:DC=AB:AC.$$

Che sia poi $EA=AB$ dimostrasi nel modo seguente. Essendo per costruzione parallele fra loro le rette AD, BE, si ha (285. 3.° 2.°) l'angolo $CAD=AEB$, e l'angolo $BAD=ABE$: ma per supposizione l'angolo $CAD=BAD$; è dunque l'angolo $AEB=ABE$. Per la qual cosa (278) il triangolo BAE sarà isoscele, ed il lato $EA=AB$.

La proposizione inversa si dimostra assai facilmente; poichè se si ha

$$BD:DC=AB:AC,$$

ove si faccia la costruzione medesima di sopra, per cui si ottiene

$$BD:DC=EA:AC,$$

risulterà $EA=AB$, e perciò l'angolo $AEB=ABE$. Ma l'angolo $AEB=CAD$, l'angolo $ABE=BAD$. Adunque l'angolo $CAD=BAD$.

351. *Due triangoli equiangoli hanno i lati omologhi proporzionali, e per conseguenza sono simili.*

I due triangoli ABC, $A'B'C'$ (*fig. 108.ª*) abbiano gli angoli rispettivamente uguali, cioè

$$A=A',\ B=B',\ C=C';$$

dico che in essi i lati omologhi sono in proporzione.

Il triangolo $A'B'C'$ soprappongasi al triangolo ABC in guisa che il lato $A'B'$ cada sopra il suo lato omologo AB da A in D; il lato $A'C'$ cadrà sopra AC da A in E per essere l'angolo $A=A'$, ed il lato $B'C'$ verrà rappresentato dalla retta DE. Ciò posto, essendo l'angolo $ADE=B'=B$, sarà DE parallela al lato BC (282. 3.°), e perciò (348. 1.°)

$$AD:AB=AE:AC\text{ , ossia }A'B':AB=A'C':AC.$$

D' altronde conducendo EF parellela al lato AB, si ha pure

$$AE:AC=BF:BC,\text{ donde (292) }A'C':AC=B'C':BC.$$

Adunque

$$A'B':AB=A'C':AC=B'C':BC.$$

E qui è da notarsi che nei triangoli simili i lati omologhi si oppongono ad angoli uguali; infatti essendo l'angolo $A=A'$, il lato BC è omologo al lato $B'C'$: così pure i lati AB, $A'B'$ sono omologhi, e l' angolo $C=C'$.

352. *Due triangoli che hanno i lati omologhi proporzionali sono equiangoli e simili.*

Infatti se nei due triangoli ABC, $A'B'C'$ si supponga

$$A'B':AB=A'C':AC=B'C':BC\ ;$$

prendendo in AB la parte $AD=A'B'$, e quindi conducendo DE parallela al lato BC, si avrà (351)

$$AD:AB=AE:AC=DE:BC.$$

Il primo rapporto, essendo per costruzione $AD=A'B'$, è comune ad ambedue le proporzioni ; adunque gli altri rapporti sono uguali, cioè

$$A'C':AC=AE:AC,\ B'C':BC=DE:BC.$$

Quindi deducesi $AE=A'C'$, e $DE=B'C'$. I triangoli adunque ADE, $A'B'C'$ sono fra loro uguali (276): ma il triangolo ADE è equiangolo al triangolo ABC ; sarà dunque ancora il triangolo $A'B'C'$ equiangolo e simile al triangolo ABC.

353. *Due triangoli sono simili, se hanno un angolo uguale compreso fra lati proporzionali.*

Sia l'angolo $A=A'$, e supponiamo che si abbia $A'B':AB=A'C':AC$; dico che il triangolo ABC è simile al triangolo $A'B'C'$.

Infatti applicando $A'C'$ da A in E, $A'B'$ cadrà in AD, ed il triangolo $A'B'C'$ in ADE. Ora per ipotesi si ha $AD:AB=AE:AC$; dunque DE è parallela a BC (349), ed i triangoli ABC, e ADE ossia $A'B'C'$ sono equiangoli e simili.

354. *Due triangoli sono simili, se hanno i lati rispettivamente paralleli.*

Se il lato AB è parallelo al lato $A'B'$, ed il lato BC al lato $B'C'$, l'angolo ABC è uguale all' angolo $A'B'C'$ (288) : dippiù se il lato AC è parallelo al lato $A'C'$, l' angolo ACB è uguale all' angolo $A'C'B'$, ed anche BAC a $B'A'C'$. Adunque i due triangoli ABC, $A'B'C'$ sono equiangoli e simili.

E qui si osservi che in questi triangoli simili i lati paralleli sono omologhi.

355. *Due triangoli che hanno i lati perpendicolari rispettivamente sono simili.*

Se il lato $A'B'$ (*fig. 109.ª*) è perpendicolare ad AB, e $B'C'$ a BC, nel quadrilatero $BDB'E$ i due angoli D ed E saranno retti : d' altronde tutti e quattro gli angoli del quadrilatero equivalgono insieme a quattro angoli retti

(290. 1.°); sarà dunque la somma dei due angoli DBE, $DB'E$ uguale a due retti. Ma i due angoli $DB'E$, $A'B'C'$ equivalgono pure a due angoli retti (267); per conseguenza sarà l'angolo $DBE=ABC=A'B'C'$. Nella medesima guisa, se il terzo lato $A'C'$ si suppone perpendicolare al terzo lato AC, si dimostrerà l'angolo $BAC=B'A'C'$, e l'angolo $ACB=A'C'B'$. Adunque i due triangoli ABC, $A'B'C'$, che hanno i lati rispettivamente perpendicolari, sono equiangoli e simili (*).

In questi triangoli simili i lati perpendicolari sono omologhi:

356. *Tutte le rette che partono da un medesimo punto dividono in parti proporzionali due parallele qualunque.*

Se le rette (*fig. 110.ª*) OF, OH, OK, OM, OP, ec. che partono dal medesimo punto O, secano le due parallele AB, CD, dico che si avrà

$$EG:FH=GI:HK=IL:KM=LN:MP=\text{ec.}$$

Dai due triangoli simili OEG, OFH si ha la proporzione dei lati omologhi $OG:OH=EG:FH$. Ma dai due altri triangoli simili OGI, OHK si ottiene ancora $OG:OH=GI:HK$. Dunque starà $EG:FH=GI:HK$. Con un ragionamento del tutto simile al precedente si dimostrerà $GI:HK=IL:KM$, ec.

357. *La perpendicolare che dal vertice dell'angolo retto di un triangolo rettangolo si abbassa sopra la ipotenusa, divide il triangolo in due altri triangoli simili fra loro, e simili al triangolo totale.*

Abbiasi un triangolo ABC (*fig. 111.ª*) rettangolo in A: se da questo punto sopra la ipotenusa BC si abbassa la perpendicolare AD, i due triangoli parziali ABD, ADC risulteranno simili fra loro, e ad ABC.

Infatti nei due triangoli ABD, ABC l'angolo B è comune; dippiù l'angolo retto BDA è uguale all'angolo retto BAC; dunque il terzo angolo BAD dell'uno è uguale al terzo C dell'altro (289. 3.°), e per conseguenza questi due triangoli sono equiangoli, e quindi simili. Nella medesima guisa si dimostrerà il triangolo ADC simile al triangolo ABC. Laonde i tre triangoli ABC, ABD, ADC sono equiangoli e simili fra loro.

Adunque 1.° La perpendicolare AD è media proporzionale tra i due segmenti della ipotenusa BC. Poichè i triangoli ABD, ADC danno $BD:AD=$ $=AD:DC$, donde $(AD)^2=BD\times DC$.

2.° Ogni cateto AB, o AC è medio proporzionale tra la intera ipotenusa BC, ed il segmento adiacente BD, o DC. Perocchè i triangoli ABC, ABD danno $BD:AB=AB:BC$, ossia $(AB)^2=BD\times BC$: i triangoli ABC, ADC danno $DC:AC=AC:BC$, ossia $(AC)^2=DC\times BC$.

3.° Sommando insieme le due equazioni

$$(AB)^2=BD\times BC\,,\quad (AC)^2=DC\times BC,$$

si ha

$$(AB)^2+(AC)^2=(BD+DC)BC=(BC)^2\,;$$

(*) Questo caso dei lati perpendicolari può benissimo offrire una situazione relativa dei due triangoli ABC, $A'B'C'$ diversa da quella che si è supposta nella figura: nondimeno potendosi dentro uno di questi due triangoli costruire un triangolo i cui lati sieno paralleli rispettivamente a quelli dell'altro, la dimostrazione si potrà far sempre (354) rientrare nel caso della nostra figura.

cioè il quadrato della ipotenusa BC è uguale alla somma dei quadrati dei due cateti AB, AC, lo che in altra guisa erasi dimostrato sopra (343).

4.° Se da un punto qualunque A (*fig. 112.*ª) della circonferenza si conducano le due corde AB, AC alle estremità del diametro BC, il triangolo ABC sarà (314. 2.°) rettangolo in A, e perciò (1.°) la perpendicolare AD sarà media proporzionale fra i due segmenti BD, DC del diametro.

358. *Due triangoli che hanno un angolo uguale stanno fra loro come i rettangoli dei lati che comprendono quest' angolo.*

Nei due triangoli ABC, $A'B'C'$ (*fig. 113.*ª) abbiasi l'angolo $BAC = B'A'C'$; le perpendicolari BD, $B'D'$ sopra le loro basi AC, $A'C'$ daranno (338) $\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{BD.AC}{B'D'.A'C'}$: d'altronde dai triangoli simili ABD, $A'B'D'$ (351) si deduce $\frac{BD}{B'D'} = \frac{AB}{A'B'}$. Adunque sostituendo, otterremo $\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{AB.AC}{A'B'.A'C'}$, donde ec. . .

359. *Due poligoni simili sono composti di un medesimo numero di triangoli simili rispettivamente, e similmente disposti.*

Propongansi due poligoni simili qualunque $ABCD$ ec., $A'B'C'D'$ ec. (*fig. 114.*ª). Dal vertice di uno stesso angolo A conducendo nel primo poligono le diagonali AC, AD, ec. e dal vertice dell'angolo A' omologo all'angolo A, conducendo nell'altro poligono le diagonali $A'C'$, $A'D'$, ec. dico essere i triangoli ABC, ACD, ec. rispettivamente simili ai triangoli $A'B'C'$, $A'C'D'$, ec.

Poichè i poligoni sono simili, sarà (347) l'angolo ABC uguale al suo omologo $A'B'C'$, e dippiù si avrà la proporzione $AB:A'B' = BC:B'C'$. Adunque i due triangoli ABC, $A'B'C'$ hanno un angolo uguale compreso fra lati proporzionali; essi per conseguenza sono (353) equiangoli e simili. Segue da ciò che l'angolo $ACB = A'C'B'$, e che $AC:A'C' = BC:B'C'$: d'altronde per la somiglianza dei poligoni l'angolo $BCD = B'C'D'$, e $BC:B'C' = CD:C'D'$; sarà dunque l'angolo $ACD = A'C'D'$, ed insieme $AC:A'C' = CD:C'D'$. Adunque ancora i due triangoli ACD, $A'C'D'$ hanno un angolo uguale compreso fra lati proporzionali; essi perciò sono eziandio equiangoli e simili. In una maniera del tutto conforme alle precedenti dimostrasi la somiglianza dei triangoli susseguenti, qualunque nel resto sia il numero dei lati dei poligoni proposti.

La proposizione inversa è ugualmente vera: *se due poligoni sono composti dello stesso numero di triangoli simili e similmente disposti, questi due poligoni sono simili.*

Imperocchè la somiglianza dei triangoli rispettivi dà l'angolo $ABC = A'B'C'$, $ACB = A'C'B'$, $ACD = A'C'D'$, e conseguentemente $BCD = B'C'D'$, come pure $CDE = C'D'E'$, ec. . . . Inoltre $AB:A'B' = BC:B'C' = AC:A'C' = CD:C'D' =$ ec. . . . Adunque i poligoni dei quali si tratta, hanno gli angoli uguali, ed i lati proporzionali; essi per conseguenza sono simili.

360. *I perimetri dei poligoni simili stanno fra loro come i lati omologhi.*

Infatti dalla somiglianza dei poligoni $ABCD$ec.., $A'B'C'D'$ec. si ha

$$AB:A'B' = BC:B'C' = CD:C'D' = \text{ec.} \ldots$$

donde (247)

$$AB+BC+CD+\ldots : A'B'+B'C'+C'D'+\ldots = AB:A'B' = \ldots$$

361. *Le aree di due triangoli simili stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi.*

Sieno ABC, $A'B'C'$ (*fig. 115.ª*) due triangoli simili; avremo $AB:A'B'=$ $=BC:B'C'$. Ma le perpendicolari AD, $A'D'$ alle basi BC, $B'C'$ formano i triangoli simili ABD, $A'B'D'$, donde $AB:A'B'=AD:A'D'$; dunque $BC:B'C'=$ $=AD:A'D'$, ossia $\frac{BC}{B'C'}=\frac{AD}{A'D'}$. Moltiplicando i due membri per $\frac{AD}{A'D'}$, si ottiene $\frac{BC.AD}{B'C'.A'D'}=\frac{(AD)^2}{(A'D')^2}$. Con questa equazione si formerà agevolmente la seguente proporzione $\frac{1}{2}BC.AD$: $\frac{1}{2}B'C'.A'D'=(AD)^2:(A'D')^2=(AB)^2:$ $(A'B')^2=\ldots$ Ma (338) $\frac{1}{2}BC.AD$ è la misura dell'area del triangolo ABC, $\frac{1}{2}B'C'.A'D'$ è la misura dell' area del triangolo $A'B'C'$. Adunque ec.

362. *Le aree di due poligoni simili stanno tra loro come i quadrati dei lati omologhi.*

Nei poligoni simili $ABCD$ ec., $A'B'C'D'$ ec. (*fig. 114.ª*) i triangoli ABC, ACD, ec. . . $A'B'C'$, $A'C'D'$, ec. . . . sono (359) simili rispettivamente; si ha quindi (361) $ABC:A'B'C'=(AB)^2:(A'B')^2$, $ACD:A'C'D'=$ $=(AC)^2:(A'C')^2=(AB)^2:(A'B')^2$, ec. . . Per la qual cosa sarà

$$ABC:A'B'C'=ACD:A'C'D'=\ldots=(AB)^2:(A'B')^2.$$

Donde (247)

$$ABC+ACD+\ldots : A'B'C'+A'C'D'+\ldots = (AB)^2:(A'B')^2;$$

cioè

$$ABCD \text{ ec.}:A'B'C'D' \text{ ec.}=(AB)^2:(A'B')^2.$$

Da siffatta proporzione, costruendo tre poligoni M, N, P (*fig. 116.ª*) simili fra loro, i cui lati omologhi sieno quelli di un triangolo rettangolo ABC, si deduce

$$M:N:P=(BC)^2:(AB)^2:(AC)^2,$$

e perciò

$$M:N+P=(BC)^2:(AB)^2+(AC)^2.$$

Ma (343) $(BC)^2=(AB)^2+(AC)^2$. Dunque $M=N+P$.

363. *Le parti di due corde che si tagliano dentro di un cerchio sono proporzionali reciprocamente.*

Sieno AB, CD (*fig. 117.ª*) queste corde, le quali si sechino scambievolmente nel punto O. Conducendo le rette AC, BD, i due triangoli ACO, BDO hanno uguali fra loro gli angoli in O perchè opposti al vertice, gli angoli in A e D perchè iscritti nel medesimo segmento (314. 1.°), e gli angoli in C e B per

la stessa ragione; questi triangoli adunque sono (289. 3.°:351) simili, ed i loro lati omologhi danno la proporzione

$$AO:DO=CO:BO,$$

nella quale si contiene l' enunciato teorema.

364. *Se da un punto preso fuori di un cerchio si conducano ad esso due secanti terminate all' arco concavo, saranno queste secanti reciprocamente proporzionali alle loro parti esterne.*

Sieno AB, AC (*fig. 118.ª*) le due secanti; conducendo le rette BE, CD, i due triangoli ABE, ACD, avendo l' angolo A comune, l' angolo $B=C$ (314. 1.°), avranno eziandio l' angolo $AEB=ADC$ (289. 3.°), e per conseguenza saranno equiangoli e simili. Quindi i lati omologhi daranno la proporzione

$$AB:AC=AE:AD.$$

365. *Se da un punto preso fuori di un cerchio si conduca al medesimo una tangente ed una secante terminata all' arco concavo, sarà la tangente media proporzionale fra la secante e la sua parte esterna.*

Dal punto O (*fig. 119.ª*) preso fuori del cerchio ABC, conducendo a questo stesso cerchio la tangente OA e la secante OB, si avrà

$$OB:OA=OA:OC.$$

Infatti tirando le corde AB, AC, i due triangoli OAC, OAB risulteranno simili. Imperocchè questi due triangoli hanno l' angolo O comune, e l' angolo $OAC=B$ (313.314). Paragonando adunque fra loro i lati omologhi, otterremo la succennata proporzione, dalla quale si deduce $(OA)^2=OB.OC$.

CAPO XV.

DI ALCUNI PROBLEMI DEI QUALI LA SOLUZIONE DIPENDE DALLE TEORIE ESPOSTE NEL CAPITOLO PRECEDENTE.

366. *Dividere una retta data in quante parti uguali si voglia.*

Sia AB (*fig. 120.ª*) la retta data, la quale si voglia dividere in m parti uguali. Pel punto A si conduca la indefinita AC, la quale faccia con la AB un angolo qualunque BAC; sopra questa indefinita AC, cominciando dal punto A, si porti m volte l' apertura di compasso arbitraria $Aa=ab=bc= \ldots =eC$; quindi finalmente si congiunga il punto C col punto B con la retta CB, ed a questa per i punti a, b, c, . . . si conducano le parallele aa', bb', cc', . . . Da ciò che si è dimostrato sopra (348. 2.°) si ha

$$Aa:Aa'=ab:a'b'=bc:b'c'= \ldots =eC:e'B.$$

Ma per costruzione le m parti Aa, ab, bc, . . . , eC sono tutte uguali fra loro. Dunque le m parti Aa', $a'b'$, $b'c'$, . . . , $e'B$ saranno eziandio fra loro uguali.

In generale poi per dividere una data retta AB (*fig. 121.ª*) in parti proporzionali a quelle di un'altra retta data ab, si condurrà prima una retta qualunque AC, sulla quale si prenderà $AM{=}am$, $MN{=}mn$, $NP{=}np$, ... $RC{=}rb$, e quindi si congiungerà BC, ed a questa si tireranno le parallele Mm', Nn', Pp', . . .

Imperocchè a motivo di siffatte parallele, le parti Am', $m'n'$, $n'p'$, . . . , $r'B$ sono rispettivamente proporzionali alle parti AM, MN, NP, . . . , RC. Ma queste per costruzione sono uguali alle parti am, mn, np, . . . , rb. Adunque ec.

367. *Trovare una quarta proporzionale a tre rette date.*

Le tre rette date sieno A, B, C (*fig. 122.ª*). Si faccia un angolo qualunque MON, e sopra uno dei suoi lati p. e. OM si prenda $OA{=}A$ ed $OB{=}B$: quindi sopra l'altro lato ON si prenda $OC{=}C$. Ciò fatto, si congiunga AC, ed a questa pel punto B si conduca la parallela BD; sarà OD la quarta proporzionale cercata.

Si ha infatti (348. 1.°)

$$OA(=A):OB(=B)=OC(=C):OD.$$

Con la medesima costruzione si troverà una terza proporzionale dopo due rette date A, B. Imperocchè questa terza proporzionale è la stessa che la quarta proporzionale dopo le tre rette A, B, B.

368. *Trovare una media proporzionale tra due rette date.*

Sieno A, B (*fig. 123.ª*) le due rette date. Sopra la indefinita CD si prenda $CE{=}A$, ed $EF{=}B$; quindi sopra la intera CF come diametro, si descriva la semicirconferenza CGF; dal punto E s'innalzi la perpendicolare EG al diametro; sarà EG la media proporzionale cercata.

Si ha infatti (357. 4.°)

$$CE(=A):EG=EG:EF(=B).$$

369. *Dividere una retta data in media ed estrema ragione.*

Una retta si dice divisa in media ed estrema ragione, allorchè si divide in due parti in modo che la parte maggiore sia media proporzionale tra la retta intera e la parte minore. Posto ciò, sia AB (*fig. 124.ª*) la retta data. Dalla estremità A s'innalzi la perpendicolare AC uguale alla metà di AB, e si congiunga CB; quindi dal punto C come centro, e col raggio CA si descriva una circonferenza, la quale sechi in D la retta CB; si prenda finalmente $BE{=}BD$. Dico che la retta AB è divisa nel punto E in media ed estrema ragione.

Prolungando infatti la retta BC in F, si avrà (365) $BF{:}AB{=}AB{:}BD$; donde (246) $BF{-}AB{:}AB{=}AB{-}BD{:}BD$. Ma $BF{-}AB{=}BF{-}FD{=}$ ${=}BD{=}BE$, $AB{-}BD{=}AB{-}BE{=}AE$. Sarà dunque $BE{:}AB{=}AE{:}BE$, ossia $AB{:}BE{=}BE{:}AE$.

370. *Per un punto dato dentro di un dato angolo tirare una linea retta, in guisa che sieno uguali fra loro le parti comprese fra il punto dato, ed i lati dell'angolo dato.*

Sia A (*fig.* 125.ª) il punto dato dentro dell' angolo BCD. Pel punto A si conduca AE parallela al lato CD; si prenda quindi $EB{=}EC$, e per i punti B ed A si conduca la retta BAD; sarà questa la linea cercata.

Abbiamo infatti la proporzione (348) $BE{:}EC{=}BA{:}AD$. Ma per costruzione $BE{=}EC$. Sarà dunque ancora $BA{=}AD$.

371. *Costruire un quadrato equivalente ad un dato parallelogrammo o ad un triangolo dato.*

1.° Il parallelogrammo dato abbia l'altezza $=A$, e la base $=B$. Si cerchi (368) la media proporzionale X tra A e B, e su di essa si costruisca il quadrato; sarà questo il quadrato cercato.

Infatti si ha $A{:}X{=}X{:}B$, donde $X^2{=}A.B$. Ma $A.B$ è la misura del parallelogrammo dato, e X^2 è quella del quadrato che si costruisce sopra la retta X. Adunque ec.

2.° Il triangolo dato abbia l' altezza $=A$, e la base $=B$. Si trovi la media proporzionale X tra $\frac{A}{2}$ e B, e su di essa si costruisca il quadrato; sarà questo quadrato equivalente al dato triangolo.

Infatti si ha $\frac{A}{2}{:}\ X{=}X{:}B$; donde $X^2{=}\frac{A.B}{2}$.

372. *Costruire sopra una data retta un rettangolo equivalente ad un altro rettangolo dato.*

Il rettangolo dato abbia l' altezza $=A$, e la base $=B$, e sia C la retta data. Si determini (367) la quarta proporzionale X dopo le tre rette C, A, B; il rettangolo che si costruirà sopra C ed X sarà il rettangolo cercato.

Imperocchè avendosi per costruzione $C{:}A{=}B{:}X$, sarà $A.B{=}C.X$.

373. *Costruire un triangolo equivalente ad un dato poligono.*

Il poligono dato sia p. e. il pentagono $ABCDE$ (*fig.* 126.ª). Conducendo la diagonale CE ed a questa la parallela DF, la quale incontri in F il prolungamento del lato AE, si congiunga CF; sarà (333) il triangolo CDE equivalente al triangolo CFE. Adunque togliendo il triangolo CDE, e ad esso sostituendo il triangolo CFE, si avrà il quadrilatero $ABCF$ equivalente al pentagono $ABCDE$. Parimenti conducendo la diagonale CA, e ad essa la parallela BG, che incontri in G il lato AE prolungato, si congiunga CG; sarà il triangolo CBA equivalente al triangolo CGA. Laonde al triangolo CBA sostituendo il triangolo CGA, si avrà il triangolo GCF equivalente al quadrilatero $ABCF$, e quindi ancora al proposto pentagono $ABCDE$.

Lo stesso processo si applica ad un qualunque altro poligono, facendo uno per volta diminuire il numero dei suoi lati, finchè si giunga al triangolo equivalente.

Abbiamo veduto sopra (371) potersi sempre costruire un quadrato equivalente ad un dato triangolo. Ora ogni poligono può trasformarsi in un triangolo equivalente. Si potrà dunque sempre costruire un quadrato equivalente ad un poligono dato.

374. *Costruire un quadrato uguale alla somma o alla differenza di due quadrati dati.*

Sieno A, B (*fig.* 127.ª) i lati dei due quadrati dati.

1.° Se fa d' uopo costruire un quadrato uguale alla somma di questi quadrati, si faccia l' angolo retto CDE, e nei lati indefiniti di questo si prenda

$Da = A$ e $Db = B$; conducendo la retta ab, esprimerà (343) questa il lato del cercato quadrato (*).

2.° Se si cerca un quadrato uguale alla differenza dei due quadrati dati, si formi pure l' angolo retto CDF, e nel lato DC di questo angolo si prenda Db uguale al minore B dei due lati dati; quindi dal punto b come centro, e con un raggio uguale al lato maggiore A si descriva un arco di cerchio il quale tagli DF in c; sarà (343. 1.°) Dc il lato del cercato quadrato.

375. *Costruire un quadrato che stia ad un altro dato quadrato nella medesima ragione di due rette date.*

Sia $ABCD$ (*fig. 128.ª*) il quadrato dato, ed M, N le due rette date. Sopra una retta indefinita EF si prenda $FG = M$, ed $EG = N$; sopra EF come diametro, si descriva una semicirconferenza; quindi dal punto G si alzi sul diametro la perpendicolare GH; dal punto H si tirino le corde HE, HF le quali si prolunghino indefinitamente; sulla prima si prenda HI uguale ad AB lato del quadrato dato, e per I si conduca IK parallela ad EF; sarà HK il lato del cercato quadrato.

Abbiamo infatti (348. 1.°) $HK : HI = HF : HE$, donde $(HK)^2 : (HI)^2 = (HF)^2 : (HE)^2$. Ma (343. 3.°) $(HF)^2 : (HE)^2 = FG : EG = M : N$. Sarà dunque $(HK)^2 : (HI)^2 = M : N$. Ma per costruzione $(HI)^2 = (AB)^2$. Adunque $(HK)^2 : (AB)^2 = M : N$.

376. *Sopra una data retta costruire un poligono simile ad un poligono dato.*

Sia $ABCD$ ec. (*fig. 114.ª*) il poligono dato, ed $A'B'$ la retta data, sulla quale come lato omologo ad AB faccia d' uopo costruire un poligono simile al poligono $ABCD$ ec.

Conducansi in questo poligono le diagonali AC, AD, . . . ; al punto A' si faccia l' angolo $B'A'C' = BAC$; e al punto B' l' angolo $A'B'C' = ABC$; le rette $A'C'$, $B'C'$ si segheranno nel punto C', ed il triangolo $A'B'C'$ sarà (351) simile al triangolo ABC. Nella medesima maniera costruendo sopra $A'C'$ il triangolo $A'C'D'$ simile al triangolo ACD, sopra $A'D'$ il triangolo $A'D'E'$ simile al triangolo ADE, ec.; si avrà (359) il poligono $A'B'C'D'$ ec. simile al poligono dato $ABCD$ ec.

Si potrà ora costruire un poligono simile ad un poligono dato, e che stia a questo nel rapporto di M ad N. Imperocchè se A è uno dei lati del poligono dato, ed X il lato omologo nel poligono cercato, dovrà essere (362) $X^2 : A^2 = M : N$. Adunque cercando X come nel n.° 375, e costruendo su di esso un poligono simile al poligono dato, starà quello a questo come M ad N.

377. *Essendo dati due poligoni simili* P, P', *costruire un terzo poligono* P'' *simile ai dati, ed insieme uguale alla loro somma, ovvero alla loro differenza.*

Sieno A, A' due lati omologhi dei poligoni dati. Si faccia (374) un quadrato uguale alla somma o alla differenza dei quadrati fatti sopra A, A'; chiamando A'' il lato di questo quadrato, sarà A'' nel cercato poligono il lato omo-

(*) Si può trovare ancora un quadrato uguale alla somma di quanti quadrati si vorrà. Imperocchè quella costruzione che ne riduce due ad un solo, ne ridurrà tre a due, e questi due ad uno, e così degli altri.

logo ad A, A' nei dati poligoni P, P'. Si costruirà in seguito il poligono P'' col metodo del numero precedente.

Abbiamo infatti (362)

$$P:P':P''=A^2:A'^2:A''^2, \text{ donde } P\pm P':P''=A^2\pm A'^2:A''^2.$$

Ma per costruzione $A''^2=A^2\pm A'^2$. Sarà dunque $P''=P\pm P'$.

378. *Essendo dati due poligoni qualunque* P, Q, *costruire un terzo poligono, il quale sia simile a* P *ed insieme equivalente a* Q.

Si cerchino primieramente (373) i due quadrati rispettivamente equivalenti ai due poligoni dati P, Q; i lati poi di questi quadrati si dicano M, N, e si dinoti con A uno dei lati del poligono P; si trovi la quarta proporzionale X alle tre rette M, N, A, e sulla X come lato omologo ad A si costruisca un poligono Y simile al poligono P. Dico che sarà Y equivalente ancora al poligono Q.

Si ha infatti $P:Y=A^2:X^2$; ma per costruzione $M^2:N^2=A^2:X^2$; dunque starà $P:Y=M^2:N^2$. Ma si ha pure per costruzione $M^2=P$, $N^2=Q$. Dunque $P:Y=P:Q$, donde si deduce $Y=Q$.

CAPO XVI.

DEI POLIGONI REGOLARI, DELLA MISURA DELLA CIRCONFERENZA E DELL'AREA DEL CERCHIO.

379. I poligoni che sono equilateri ed insieme equiangoli si appellano *poligoni regolari*.

Posto ciò, agevolmente si dimostra che *due poligoni regolari di un medesimo numero di lati sono due figure simili*.

Si propongano, per esempio, i due pentagoni regolari $ABCDE$, $A'B'C'D'E'$ (*fig. 129.ª*). La somma degli angoli essendo nell'una e nell'altra figura uguale a sei angoli retti (290. 2.°), l'angolo A sarà la quinta parte di questa somma ugualmente che l'angolo A'; adunque l'angolo $A=A'$. Per la ragione medesima $B=B'$, $C=C'$, ec. Avendosi inoltre $AB=BC=CD=$ec., e $A'B'=$ $=B'C'=C'D'=$ec. è chiaro potersi stabilire le seguenti proporzioni

$$AB:A'B'=BC:B'C'=CD:C'D'=\text{ec.}$$

Adunque le due proposte figure $ABCDE$, $A'B'C'D'E'$ hanno gli angoli uguali ed i lati omologhi proporzionali; esse per conseguenza sono simili (347).

Adunque (360. 362) i perimetri di due poligoni regolari di un medesimo numero di lati stanno fra loro come i lati omologhi, e le loro superficie come i quadrati di questi medesimi lati.

380. Un poligono allora è *iscritto nel cerchio*, quando i vertici di tutti i

suoi angoli sono sulla circonferenza: in questo caso il cerchio si dice *circoscritto al poligono*. Un poligono inoltre è *circoscritto al cerchio* quando tutti i suoi lati sono tangenti alla circonferenza, nel qual caso si dice che il cerchio è *iscritto nel poligono*.

Ora io dico che *ad ogni poligono regolare si può circoscrivere ed iscrivere un cerchio.*

Sia $ABCD$ ec. (*fig. 130.ª*) un poligono regolare qualunque. Se si dividano gli angoli A, e B in due parti uguali con le rette AO e BO, e dal punto O di concorso si conduca OC; i due triangoli AOB, BOC risulteranno uguali fra loro, poichè si ha $AB=BC$, il lato OB comune, e l'angolo $ABO=OBC$. Adunque $OA=OC=OB$. Si dimostrerà similmente $OB=OD=OC$, ec.

Dal detto conseguita che il punto O è il centro del cerchio circoscritto al poligono proposto, che le rette condotte da questo centro agli angoli del poligono sono uguali, che esse dividono questi angoli in due parti uguali, che formano i triangoli isosceli AOB, BOC, COD, ec., e che finalmente gli angoli al centro AOB, BOC, COD, ec. . . sono uguali fra loro.

Le corde AB, BC, CD, . . . ugualmente distano dal centro O; le perpendicolari dunque OI, OI', OI'', . . . sono uguali (301. 1.°). Laonde ove dal centro O col raggio OI si descriva un cerchio, la sua circonferenza toccherà tutti i lati del poligono nei loro punti medii I, I', I'', . . .

381. Allorchè dunque il poligono regolare è dato, qualunque nel resto sia il numero dei suoi lati, si saprà sempre ed agevolmente circoscrivere ed iscrivere al medesimo un cerchio. Il problema inverso consiste nell'iscrivere e circoscrivere a un dato cerchio un poligono regolare di un determinato numero di lati: ma noi siamo molto lontani dal sapere risolvere questo problema in generale. Esporremo per altro alcuni casi particolari, nei quali se ne può trovare la soluzione.

Prima però faremo osservare che *quando un poligono regolare è iscritto in un cerchio, è facile circoscrivere al medesimo cerchio un simile poligono regolare; e reciprocamente.*

Sia infatti $ABCD$ ec. il dato poligono regolare iscritto. Al punto T medio dell'arco AB si conduca la tangente $A'B'$, e si faccia la stessa cosa ai punti T', T'', . . . medii di ciascuno degli altri archi BC, CD, . . . Queste tangenti formeranno con le loro intersezioni il poligono regolare circoscritto $A'B'C'D'$ ec. simile al poligono iscritto $ABCD$ ec.

Imperocchè i lati $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, . . . essendo (299. 302. 280) rispettivamente paralleli ai lati AB, BC, CD, . . ; sarà (288) l'angolo $A'=A$, l'angolo $B'=B$, l'angolo $C'=C$, . . . Dippiù l'angolo IOI' è diviso in due parti uguali da OB, perchè B è il punto medio dell'arco TT': d'altronde il triangolo TOB' è uguale al triangolo $T'OB'$ (281. 5.°), e perciò l'istesso angolo IOI' è diviso ancora in due parti uguali da OB'; adunque i tre punti O, B, B' sono in linea retta. Lo stesso ha luogo per i punti O, C, C'; O, D, D'; ec. Dal detto risulta $\frac{AB}{A'B'}=\frac{OB}{OB'}$, $\frac{BC}{B'C'}=\frac{OB}{OB'}$, donde $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$. Nella medesima guisa si dimostrerebbe $\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=$ec.

Reciprocamente se il poligono circoscritto $A'B'C'D'$ ec. è dato, si condurranno dal centro O le rette OA', OB', OC', OD', . . . ; quindi per i punti A, B, C, D, . . . , nei quali esse secano la circonferenza, si condurranno le

corde AB, BC, CD, . . . , ed il poligono regolare $ABCD$ ec. sarà iscritto.

382. *Iscrivere un quadrato in una data circonferenza.*

Nella data circonferenza si conducano due diametri AC, BD (*fig. 131.ª*), i quali scambievolmente si sechino ad angoli retti; congiungendo le estremità A, B, C, D, la figura $ABCD$, che quindi risulterà, sarà il quadrato iscritto. Si vede infatti aver essa i quattro angoli retti ed i lati uguali.

Il triangolo AOB è rettangolo ed isoscele; si avrà perciò

$$(AB)^2=(AO)^2+(BO)^2=2(AO)^2 \text{ donde } AB=AO\sqrt{2}, \text{ ed } \frac{AB}{AO}=\sqrt{2}.$$

Adunque *il lato del quadrato iscritto in un cerchio è incommensurabile col raggio del medesimo cerchio.*

383. *Iscrivere un esagono regolare, ed un triangolo equilatero in una circonferenza data.*

Supponendo risoluto il problema, sia AB (*fig. 132.ª*) un lato dell'esagono iscritto; se dal centro O si conducano i raggi OA, OB, il triangolo AOB risulterà equiangolo. Infatti l'angolo in O essendo il sesto di quattro retti, ossia 60°, gli angoli uguali A e B presi insieme equivarranno a $180^\circ-60^\circ=120^\circ$; dunque ognuno di essi sarà 60°. Ma un triangolo equiangolo è eziandio equilatero (278). Adunque $AO=AB$; *il lato cioè dell'esagono regolare iscritto in un cerchio agguaglia il raggio del cerchio.*

Comprendesi quindi agevolmente che per iscrivere un esagono regolare in una circonferenza data, fa d'uopo portare il raggio sei volte sulla medesima, con che si ritornerà sul punto stesso donde si era partito.

Ora se si uniscano a due a due gli angoli dell'esagono regolare, si avrà il triangolo equilatero iscritto ACE. Conducendo poi il raggio OC, la figura $ABCO$ è (293) un parallelogrammo ed anche (261) una losanga, perchè $AB=$ $=BC=CO=AO$; sarà perciò (346) $(AC)^2+(BO)^2=4(AB)^2=4(BO)^2$, donde $(AC)^2=3(BO)^2$, ed $\frac{AC}{BO}=\sqrt{3}$. Adunque *il lato del triangolo equilatero iscritto in un cerchio è incommensurabile col raggio del medesimo cerchio.*

384. *Iscrivere in una data circonferenza un decagono regolare, quindi un pentagono, ed un pentadecagono.*

Si divida il raggio AO (*fig. 133.ª*) in media ed estrema ragione nel punto M (369), e si prenda la corda AB uguale al segmento maggiore MO; sarà AB il lato del decagono regolare, che farà d'uopo portare dieci volte sulla circonferenza.

Conducendo MB, poichè si ha per costruzione $AO:MO=MO:AM$, ovvero a motivo di $AB=MO$, $AO:AB=AB:AM$, i due triangoli ABO, ABM avranno l'angolo comune A compreso fra lati proporzionali; essi dunque saranno simili (353). Ma il triangolo ABO è isoscele. Dunque isoscele ancora sarà il triangolo ABM, e si avrà per conseguenza $AB=BM$. Ma $AB=MO$; dunque $BM=MO$, ed il triangolo BMO sarà pure isoscele.

Ciò posto, l'angolo esterno AMB per rapporto al triangolo isoscele BMO è doppio dell'angolo interno O (289). Ma l'angolo $AMB=BAM$. Adunque il triangolo isoscele ABO è tale che ciascuno degli angoli alla base OAB, OBA è doppio dell'angolo O al vertice, e perciò tutti e tre i suoi angoli equivalgono

a cinque volte l' angolo O. È dunque l' angolo O la quinta parte di due retti, ovvero la decima di quattro retti; quindi l' arco AB sarà la decima parte della circonferenza, e la corda AB il lato del decagono regolare iscritto.

Ora se si uniscano a due a due i vertici degli angoli del decagono regolare, si otterrà il pentagono regolare iscritto.

Dippiù i lati dell' esagono e del decagono sottendendo archi che sono il sesto ed il decimo della circonferenza, se AL esprime il lato dell' esagono, sarà l'arco BL per rapporto alla circonferenza uguale a $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}$, ossia a $\frac{1}{15}$, e la corda dell' arco BL il lato del pentadecagono regolare iscritto.

385. Allorchè si è iscritto in un cerchio un poligono regolare, se si dividano per metà gli archi sottesi dai suoi lati, e quindi si conducano le corde dei semiarchi, si otterrà un nuovo poligono regolare iscritto di un doppio numero di lati. Adunque da quanto è detto finora si rileva, potersi iscrivere, e conseguentemente ancora circoscrivere (381) al cerchio i poligoni regolari di 3, 6, 12, 24, . . . , 3×2^n lati; quei di 4, 8, 16, 32, . . . , 4×2^n lati; quei di 5, 10, 20, 40, . . . , 5×2^n lati; e finalmente quei di 15, 30, 60, 120, . . . , 15×2^n lati.

Si è per lungo tempo creduto che questi poligoni fossero i soli che potessero essere iscritti e circoscritti per mezzo della Geometria elementare: ma il celebre Gauss nella sua opera che ha per titolo *Disquisitiones Arithmeticae* (Lipsiae 1801 in 8.vo), ha dimostrato che coi soli mezzi della Geometria elementare possono eziandio iscriversi e circoscriversi tutti i poligoni di $2^m(2^n+1)$ lati, purchè 2^n+1 sia un numero primo.

386. I triangoli rettangoli e simili AOI, $A'OT$ (*fig. 130.*^{a}) danno $\frac{AI}{A'T}=\frac{OI}{OT}$; ma (343. 1.°) $OI=\sqrt{(AO)^2-(AI)^2}$; si avrà dunque sostituendo

$$\frac{AI}{A'T}=\frac{\sqrt{(AO)^2-(AI)^2}}{OT}.$$

Abbiamo inoltre

$$IT=OT-OI=OT-\sqrt{(AO)^2-(AI)^2}.$$

Facendo quindi il raggio $AO=OT=1$, si otterranno le seguenti formole

$$\left.\begin{aligned} 2A'T=A'B'&=\frac{2AI}{\sqrt{1-(AI)^2}}=\frac{AB}{\sqrt{1-\frac{1}{4}(AB)^2}},\\ IT&=1-\sqrt{1-\frac{1}{4}(AB)^2}.\end{aligned}\right\}(f)$$

Conduciamo pertanto la corda AT, avremo $AT=\sqrt{(AI)^2+(IT)^2}$; ma $(AI)^2=$

$$=\left(\frac{1}{2}AB\right)^2=\frac{1}{4}(AB)^2,\text{ed }(IT)^2=1+\left(1-\frac{1}{4}(AB)^2\right)-2\left(1-\frac{1}{4}(AB)^2\right)^{\frac{1}{2}};$$

sostituendo dunque si avrà

$$AT=\sqrt{2-2\left(1-\frac{1}{4}(AB)^2\right)^{\frac{1}{2}}},$$

e quindi si dedurrà

$$AB=AT\sqrt{4-(AT)^2}. \qquad (f')$$

387. Si dinoti con n il numero dei lati del perimetro $ABCD$ ec., e pongasi l'istesso $ABCD$ ec. $=p_n$; sia inoltre p_{2n} il perimetro del poligono regolare iscritto, del quale il numero dei lati è $2n$, e P_{2n} il perimetro del corrispondente poligono regolare circoscritto: dalla prima delle formole (f') si otterrà

$$p_{2n}=2n\sqrt{2-2\left\{1-\frac{1}{4}\left(\frac{p_n}{n}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}},$$

e dalla prima delle (f)

$$P_{2n}=2n\times\frac{\frac{p_{2n}}{2n}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}\left(\frac{p_{2n}}{2n}\right)^2}}=\frac{p_{2n}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}\left(\frac{p_{2n}}{2n}\right)^2}}.$$

In queste equazioni in luogo di n sostituendo successivamente i numeri 6, 12, 24, 48, ... , risulteranno (383)

$p_{12}=6,2116571$ . . . . . $P_{12}=6,4307806$ . . . . ,
$p_{24}=6,2652572$ . . . . . $P_{24}=6,3193199$ . . . . ,
$p_{48}=6,2787004$ . . . . . $P_{48}=6,2921724$ . . . . ,
$p_{96}=6,2820639$ . . . . . $P_{96}=6,2854292$ . . . . ,
$p_{192}=6,2829049$ . . . . . $P_{192}=6,2837461$ . . . . ,
$p_{384}=6,2831152$ . . . . . $P_{384}=6,2833260$ . . . . ,
$p_{768}=6,2831678$ . . . . . $P_{768}=6,2832203$ . . . . ,
$p_{1536}=6,2831809$ . . . . . $P_{1536}=6,2831941$ . . . . ,
$p_{3072}=6,2831842$ . . . . . $P_{3072}=6,2831875$ . . . . ,
$p_{6144}=6,2831850$ . . . . , $P_{6144}=6,2831858$ . . . . ,
ec. ec. . . ec. ec. . .

388. Abbiamo

$$\frac{OT}{OI}=\frac{OA'}{OA}=\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}=\text{ec.}$$

e conseguentemente (247)

$$\frac{A'B'+B'C'+C'D'+\ldots}{AB+BC+CD+\ldots}=\frac{OT}{OI}.$$

Ora è chiaro che facendo crescere indefinitamente il numero dei lati $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, . . . , AB, BC, CD, . . . sempre più la retta IT si accosterà a zero (386.(f)), ed il rapporto $\frac{OT}{OI}$ alla unità. Adunque alla unità si accosterà eziandio il rapporto

$$\frac{A'B'+B'C'+C'D'+\ldots}{AB+BC+CD+\ldots},$$

sempre più piccola si renderà la differenza tra i perimetri $A'B'C'D'$ec., $ABCD$ec., e questi stessi perimetri si accosteranno sempre più alla ugnaglianza con la circonferenza del cerchio fra essi compresa. Esprimendo quindi con π la semicirconferenza che ha il raggio $=1$, sarà (387)

$$\pi=3,141592\ldots$$

389. Segnando con S, s le aree dei due poligoni $A'B'C'D'$ec., $ABCD$ ec.; avremo (338. 339. 380)

$$\left.\begin{aligned}S&=\frac{OT}{2}(A'B'+B'C'+C'D'+\ldots),\\ s&=\frac{OI}{2}(AB+BC+CD+\ldots),\end{aligned}\right\}(f'')$$

e quindi

$$\frac{S}{s}=\frac{OT}{OI}\cdot\frac{A'B'+B'C'+C'D'+\ldots}{AB+BC+CD+\ldots}.$$

Laonde (388) facendo crescere indefinitamente il numero dei lati $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, . . . , AB, BC, CD, . . . , sempre più piccola si renderà la differenza che passa fra le aree S, s, e queste stesse aree sempre più si accosteranno alla uguaglianza con l'area del cerchio frà esse compresa. Se dunque si chiami α l'area del cerchio, π' la semicirconferenza, ed r il raggio, l'una o l'altra delle formole (f'') ci darà nel limite

$$\alpha=\frac{r}{2}\,2\pi'=r\pi';$$

donde si deduce la seguente proposizione: *l'area del cerchio agguaglia il prodotto della semicirconferenza pel raggio.*

390. Dinotando con $2\pi''$, $2\pi'''$ le circonferenze di due cerchi, con r'', r''' i loro raggi, e con p'', p''' i perimetri dei poligoni regolari, che avendo il medesimo numero n di lati sono entrambi o iscritti o circoscritti ai medesimi cerchi, si

otterrà sempre

$$\frac{2\pi''}{2\pi'''} = \frac{p''}{p'''}.$$

Imperocchè se tra siffatte ragioni vi fosse qualche differenza, questa, facendo crescere indefinitamente il numero n dei lati, dovrebbe (388) continuamente decrescere; la qual cosa è impossibile, poichè qualunque sia n costantemente si ha (379. 351)

$$\frac{p''}{p'''} = \frac{r''}{r'''}.$$

391. Quindi conseguita

$$\frac{2\pi''}{2\pi'''} = \frac{\pi''}{\pi'''} = \frac{r''}{r'''} = \frac{2r''}{2r'''};$$

per la qual cosa, dinotando con α'', α''' le aree dei cerchi, sarà (389)

$$\frac{\alpha''}{\alpha'''} = \frac{\pi''r''}{\pi'''r'''} = \frac{\pi''}{\pi'''} \cdot \frac{r''}{r'''} = \frac{r''^2}{r'''^2} = \frac{(2r'')^2}{(2r''')^2}:$$

le circonferenze cioè dei cerchi sono come i raggi o i diametri (*), *e le aree come i quadrati dei raggi o dei diametri.*

Finalmente, avendosi (389. 388)

$$\frac{\pi'}{\pi} = \frac{r}{1}, \; \pi' = \pi r,$$

(*) Da ciò si deduce che il numero π trovato sopra (388) non ci esprime altro che il rapporto di una circonferenza qualunque al suo diametro.

Archimede fu il primo ad occuparsi di questa importante ricerca: egli impiegò i poligoni iscritti e circoscritti di 96 lati ciascuno, e trovò che questo rapporto doveva essere racchiuso fra i limiti 7 : 22 e 71 : 223. Il primo è equivalente a 3, 1428, e l'altro a 3, 1408.

Adriano Mezio, geometra di Franeker, si rese celebre con la scoperta dei numeri 113:355, il più gran merito della quale, è che sieno numeri facili a ritenere a memoria, questo rapporto essendo composto dei tre primi numeri impari 1, 3, 5, ripetuti ciascuno due volte di seguito. Esso equivale a 3, 1415929.

Avanti Mezio, Ludolfo Van Ceulen, con un lavoro di una lunghezza da spaventare, continuando i calcoli di Archimede, con la iscrizione e la circoscrizione dei poligoni, portò a 34 il numero dei decimali esatti del rapporto. Più recentemente, l'infaticabile Lagny coll'aiuto di nuovi mezzi, spinse l'approssimazione fino alla centoventottesima decimale. Finalmente si trova questo calcolo portato a 154 decimali in un manoscritto della biblioteca di Ratclif a Oxford. Così il raggio del circolo essendo 1, la semicirconferenza è uguale a

$$\begin{aligned}\pi = 3,\ & 14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\\ & 50288\ 41971\ 69399\ 37510\ 58209\ 74944\\ & 59130\ 78164\ 06286\ 20899\ 86280\ 34825\\ & 34211\ 70679\ 82148\ 08651\ 32723\ 06647\\ & 09384\ 46095\ 50582\ 87172\ 53594\ 08128\\ & 4802 + ec. \ldots\ldots\end{aligned}$$

Questa approssimazione essendo molto al di sopra da ciò che si può esigere per i calcoli più delicati, possiamo mettere il rapporto del diametro alla circonferenza nel numero delle quantità interamente conosciute.

potrà l'area circolare α esprimersi altresì come segue

$$\alpha = \pi r^2.$$

CAPO XVII.

DEI PIANI, E DELLE LINEE RETTE CONSIDERATE NELLO SPAZIO.

392. Una linea retta si dice *perpendicolare ad un piano*, quando è perpendicolare a tutte le rette che pel suo *piede* si conducono nel piano. Per *piede* della perpendicolare s'intende quì il punto dove questa retta incontra il piano.

Allorchè poi una linea retta è perpendicolare ad un piano, si dirà vicendevolmente il piano perpendicolare alla linea retta.

393. Una linea retta si dice *parallela ad un piano*, quando non può incontrare il piano, comunque e a qualunque distanza si prolunghino l'uno e l'altra. Vicendevolmente il piano si dice in tal caso parallelo alla linea retta.

Due piani si dicono *paralleli fra loro*, quando non possono incontrarsi, comunque e a qualunque distanza si prolunghino l'uno e l'altro.

394. Allorchè due punti di una retta si trovano in un piano, tutta intera la retta si troverà in quel piano (254). Quindi conseguita che *la comune intersezione di due piani è una linea retta.* Imperocchè se fra due punti qualunque di questa comune intersezione si conduca una linea retta, questa dovrà tutta e nel medesimo tempo trovarsi nell'uno e nell'altro piano, sarà perciò essa stessa la comune intersezione dei due piani.

395. *Tre punti dati non in linea retta sono in un medesimo piano e ne determinano la posizione.*

Si può infatti immaginare una infinità di piani che passino tutti per la retta che unisce due dei tre punti dati (394), quindi si può far girare uno di questi piani intorno a questa retta; è chiaro che un tal piano dovrà passare pel terzo punto dato.

Adunque 1.° Due rette che si secano sono in un medesimo piano.

2.° Un triangolo è sempre in un piano.

3.° Due rette parallele determinano un piano.

4.° Due piani non possono senza confondersi avere tre punti comuni non in linea retta.

396. *Una retta perpendicolare a due altre rette che s'intersecano al suo piede in un piano, è perpendicolare a qualunque altra retta condotta per lo stesso piede nel medesimo piano, e per conseguenza è perpendicolare a questo piano* (392).

Così la retta AP (*fig. 134.*ª) se si suppone perpendicolare alle due rette BB', CC', le quali nel piano MN s'intersecano al punto P, sarà altresì perpendicolare a qualunque altra retta DD' condotta per P nel medesimo piano MN.

Per un punto d preso ad arbitrio in PD' conducasi nell'angolo $b'PC'$ la

retta bc in modo che sia $db=dc$ (370), congiungendo Ab, Ad, Ac, dal triangolo bPc si avrà (346)

$$(Pc)^2+(Pb)^2=2(Pd)^2+2(dc)^2,$$

e dall'altro bAc

$$(Ac)^2+(Ab)^2=2(Ad)^2+2(dc)^2.$$

Togliendo la prima equazione dalla seconda, risulterà

$$(Ac)^2-(Pc)^2+(Ab)^2-(Pb)^2=2(Ad)^2-2(Pd)^2.$$

Ma dai triangoli APc, APb rettangoli in P

$$(Ac)^2-(Pc)^2=(AP)^2,\ (Ab)^2-(Pb)^2=(AP)^2.$$

Adunque sostituendo, otterremo

$$2(AP)^2=2(Ad)^2-2(Pd)^2,\ \text{donde}\ (AP)^2=(Ad)^2-(Pd)^2.$$

Quindi conseguita essere il triangolo APd rettangolo in P, ed AP perpendicolare a PD'.

Da siffatta proposizione si deduce 1.° che la perpendicolare AP è più corta di una qualunque obliqua Ad, poichè si ha $AP=\sqrt{(Ad)^2-(Pd)^2}<Ad$; essa dunque misurerà la vera distanza del punto A dal piano MN.

2.° Che da un punto P dato nel piano MN non si può alzare che una sola perpendicolare a questo piano. Perocchè se si supponga per un tantino, potersi dal medesimo punto P alzare due perpendicolari, conducendo per queste due perpendicolari un piano, la cui intersezione col piano MN sia Pd, le supposte perpendicolari sarebbero perpendicolari alla Pd nel medesimo punto e nel medesimo piano, lo che si è altrove (280) dimostrato del tutto impossibile.

3.° Che da un punto A dato fuori del piano MN non si può abbassare che una sola perpendicolare a questo piano. Infatti se dal punto A si potessero abbassare le due perpendicolari AP, Ad, congiungendo Pd, il triangolo APd avrebbe due angoli retti APd, AdP, lo che è impossibile.

4.° Che le oblique AB, AC, AD, ec. (*fig.* 135.ª) ugualmente distanti dalla perpendicolare AP sono fra loro uguali; e di due oblique AD, AE disugualmente distanti dalla perpendicolare AP, la maggiore è la AE che più si allontana dalla AP. Poichè essendo retti gli angoli APB, APC, APD, ec., se le distanze PB, PC, PD, ec. si suppongono uguali fra loro, i triangoli APB, APC, APD, ec. avranno un angolo uguale compreso fra lati uguali, e conseguentemente (270) saranno fra loro uguali. Quindi fra loro uguali saranno le ipotenuse, ovvero le oblique AB, AC, AD, ec. Parimente, se la distanza PE è maggiore di PD, o della sua uguale PB, sarà (281) la obliqua AE maggiore di AB o della sua uguale AD.

5.° Che tutte le oblique uguali AB, AC, AD, ec. terminano alla circonferenza BCD ec. descritta dal piede P della perpendicolare AP come centro. Se dunque, dato il punto A fuori del piano MN, si cerca su questo piano il punto P ove cade la perpendicolare abbassata da A, fa d'uopo segnare so-

pra MN tre punti B, C, D ugualmente distanti dal punto A, e quindi cercare il centro del cerchio che passa per questi punti: questo centro sarà il punto cercato P.

397. *Se da uno stesso punto si abbassino sul medesimo piano due rette, perpendicolare l' una ed obliqua l' altra, e quindi si congiungano con una retta i loro piedi; sarà la perpendicolare che nel piano si conduce a questa retta pel piede della obliqua, perpendicolare ancora alla obliqua.*

Dal punto A (*fig. 136.ª*) si abbassino sul piano MN la perpendicolare AP e la obliqua AB; congiungendo i punti P e B con la retta PB, e per B conducendo nel piano MN la CD perpendicolare alla PB, dico essere la CD perpendicolare altresì alla AB.

Si prenda $BC=BD$, e si congiungano PC, PD, AC, AD; sarà (281) $PC=PD$, e conseguentemente ancora (396. 4.°) $AC=AD$. Adunque i triangoli ABC, ABD hanno i lati uguali rispettivamente, e perciò sarà (276) l' angolo $ABC=ABD$, e quindi CD perpendicolare alla obliqua AB.

398. *Una linea retta parallela ad un' altra che è perpendicolare ad un piano, è pure perpendicolare al medesimo piano.*

La retta AP (*fig. 137.ª*) sia perpendicolare al piano MN; qualunque altra retta BE parallela alla AP dico essere perpendicolare ad MN.

Per le due rette parallele AP, BE s' intenda condotto un piano $APBE$ il quale sechi l' altro MN nella retta PB, quindi nel piano MN si conduca CD perpendicolare a PB, e finalmente si congiunga AB. La retta CD poichè è per costruzione perpendicolare a PB, sarà per la proposizione dimostrata nel numero precedente perpendicolare ancora a BA, e conseguentemente (396) perpendicolare al piano $APBE$ ed alla retta BE. L' angolo dunque CBE è retto. Ma l' angolo EBP è pure retto, essendo per ipotesi BE parallela ad AP, ed AP perpendicolare a PB (385. 1.°). Laonde la retta BE perpendicolare nell'istesso tempo alle due rette BP e BC condotte nel piano MN, sarà perpendicolare a questo medesimo piano.

Quindi conseguita 1.° che due rette AP, BE perpendicolari allo stesso piano MN sono parallele fra loro. Imperocchè se BE non fosse parallela alla retta AP, pel punto B conducendo un' altra retta parallela ad AP, questa parallela riuscirebbe perpendicolare al piano MN; adunque dal medesimo punto B del piano MN si potrebbero innalzare due perpendicolari a questo stesso piano, lo che si è sopra (396. 2.°) dimostrato impossibile.

2.° Che due rette parallele ad una terza sono fra loro parallele, quantunque le tre rette non si trovino nel medesimo piano. Imperocchè se s'intenda condotto un piano perpendicolare alla terza retta, le altre due rette dovranno risultare perpendicolari a questo piano. Ma (1.°) due rette perpendicolari ad uno stesso piano sono fra loro parallele. Adunque ec.

399. *Una retta parallela ad un' altra retta che si trova in un qualche piano, è altresì parallela a questo piano.*

La retta AB (*fig. 138.ª*) sia parallela all'altra CD posta nel piano MN; dico essere la AB parallela al piano MN.

Infatti se la retta AB, che è tutta compresa nel piano $ACDB$ delle due parallele AB, CD, potesse incontrare il piano MN, ciò non avrebbe luogo che in un qualche punto della CD intersezione comune dei due piani. Ma è impossibile che la retta AB incontri la CD. Adunque (393) ec.

400. ***Due piani perpendicolari alla medesima linea retta sono fra loro paralleli.***

Se i due piani MN, $M'N'$ (*fig.* 139.ª) perpendicolari alla medesima linea retta AB prolungati s' incontrano, da un punto qualunque O della loro comune intersezione CD conducendo le rette OA, OB, il triangolo AOB che quindi risulta conterrà due angoli retti in A e B, lo che è impossibile (289. 4.°). Laonde i piani MN, $M'N'$ non possono incontrarsi comunque e a qualunque distanza si prolunghino: essi adunque sono (393) paralleli fra loro.

401. ***Le intersezioni di due piani paralleli con un terzo piano qualunque sono fra loro parallele.***

I due piani paralleli MN, $M'N'$ (*fig.* 140.ª) vengano secati da un terzo piano $M''N''$; dico essere fra loro parallele le intersezioni AB, CD. Imperocchè queste intersezioni per una parte sono in uno stesso piano, e per l'altra prolungate non possono incontrarsi.

Quindi si deduce 1.° che due rette parallele AC, BD comprese fra due piani paralleli MN, $M'N'$ sono uguali; infatti le intersezioni AB, CD del piano $M''N''$ di quelle rette con i piani MN, $M'N'$ essendo parallele, la figura $ABDC$ sarà un parallelogrammo, e perciò (292) $AC=BD$.

2.° Che due piani paralleli hanno la perpendicolare comune: se cioè la retta AC è perpendicolare al piano MN, essa sarà pure perpendicolare al piano $M'N'$ parallelo ad MN. Imperciocchè pel punto C tirando a piacere la retta CD nel piano $M'N'$, e per AC e CD conducendo un piano $M''N''$ la comune intersezione AB di questo piano col piano MN risulterà parallela a CD. Ora la retta AC perpendicolare al piano MN è perpendicolare ad AB; essa dunque sarà perpendicolare ancora alla CD parallela alla AB. In tal guisa resta dimostrato essere la AC perpendicolare a qualunque retta CD che pel punto C si conduce nel piano $M'N'$, resta cioè dimostrato essere la AC perpendicolare a questo piano.

3.° Che due piani paralleli sono da per tutto equidistanti; poichè se le rette AC e BD sono perpendicolari ai due piani MN, $M'N'$, esse saranno parallele fra loro (398. 1.°), e per conseguenza uguali (1.°).

402. ***Due angoli non situati nello stesso piano che hanno i lati paralleli e diretti nel medesimo senso sono uguali, ed i loro piani sono paralleli.***

L'angolo BAC (*fig.* 141.ª) suppongasi avere i lati AB, AC rispettivamente paralleli ai lati $A'B'$, $A'C'$ dell'angolo $B'A'C'$, e diretti nel medesimo senso: prendendo $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, e conducendo AA', BB', CC', CB, $C'B'$, nel parallelogrammo $AA'B'B$ sarà il lato AA' uguale e parallelo al lato BB', e nell'altro $AA'C'C$ il lato AA' uguale e parallelo al lato CC'; adunque sarà (398. 2.°) il lato BB' uguale e parallelo al lato CC', e conseguentemente $CB=C'B'$. Per la qual cosa i triangoli ABC, $A'B'C'$ che hanno i tre lati uguali rispettivamente, avranno altresì l'angolo $BAC=B'A'C'$.

Che sieno poi paralleli fra loro i piani di questi angoli, si dimostra agevolmente come segue. Sia AP la perpendicolare abbassata dal vertice A sul piano $A'B'C'$; dal piede P di questa perpendicolare conducendo le rette PH, PK parallele ai lati $A'B'$, $A'C'$, esse risultano ancora parallele ai lati AB, AC; gli angoli adunque PAB, PAC sono retti, e quindi (396) la linea retta AP perpendicolare al piano ABC. Ma (400) due piani perpendicolari alla medesima linea retta sono paralleli fra loro. Adunque paralleli fra loro sono i due piani ABC, $A'B'C'$.

Quindi si comprende che se tre rette AA', BB', CC' non poste nel medesimo piano, sono uguali e parallele, i triangoli ABC, $A'B'C'$ formati dall' una parte e dall' altra unendo le estremità di queste rette, sono uguali, e i loro piani paralleli.

403. *Due rette qualunque vengono secate da piani paralleli in parti proporzionali.*

Supponendo cioè che la linea retta AB (*fig.* 142.ª) sia secata dai tre piani paralleli MN, $M'N'$, $M''N''$ nei punti A, E, B, e che la linea retta CD sia secata dai medesimi piani nei punti C, G, D, dico essere $AE:EB=CG:GD$.

Conducasi la retta AD, e sia F il punto in cui essa incontra il piano $M'N'$; unendo AC, BD, EF, FG, avremo (401. 348) $AE:EB=AF:FD$, $AF:FD=CG:GD$, donde risulta $AE:EB=CG:GD$.

CAPO XVIII.

DEGLI ANGOLI DIEDRI E POLIEDRI.

404. La inclinazione scambievole di due piani AC, AE (*fig.* 143.ª) che si secano lungo la AB dicesi *angolo diedro*. Nell' angolo diedro i lati sono costituiti dai due piani che si dicono le *facce* dell' angolo, e il vertice dell' angolo diedro vien formato dalla intersezione comune dei due piani, la quale si chiama lo *spigolo* o la *costola* dell' angolo.

L' angolo diedro allorchè è isolato si può enunciare con le lettere AB della costola, e quando trovasi unito con altri angoli che hanno la medesima costola, s' indica con quattro lettere, osservando di porre nel mezzo le due della costola e alle estremità le lettere dei due piani, prendendone una per piano. Così l' angolo formato dai due piani AC, AE (*fig.* 144.ª) s' indica con $DABF$.

La grandezza di un angolo diedro non dipende dalla estensione dei piani che lo contengono, ma bensì dall' apertura più o meno grande di questi piani.

405. Dobbiamo ora vedere come possa misurarsi un angolo diedro. La misura di questo angolo si fa dipendere da quella dell' angolo rettilineo formato da due rette AD, AF condotte nei due piani da un medesimo punto A preso ad arbitrio nella loro comune intersezione. Ora perchè l' angolo rettilineo DAF possa servire di misura all' angolo dei piani, fa d' uopo che questi due angoli crescano o decrescano nel medesimo rapporto.

Ma perciò si esige primieramente che le rette AD, AF facciano con la intersezione AB angoli uguali; poichè altrimenti l' angolo DAF di queste rette non svanirebbe quante volte il piano AE venisse a coincidere col piano AC, cioè l' angolo DAF non sarebbe nullo nello stesso tempo che è nullo l' angolo dei piani. Supporremo dunque che gli angoli BAD, BAF sieno uguali. Si esige inoltre che questi angoli sieno retti. Imperciocchè se il piano AE applicato in principio sul piano AC, fa una mezza rivoluzione intorno ad AB in modo da venire a distendersi sul prolungamento AG del piano AC, la retta AF prenderà la direzione di AH, e bisognerà che AH sia il prolungamento di AD,

poichè altrimenti la inclinazione di due piani che son posti per diritto e che non formano che un sol piano, sarebbe misurata da un angolo rettilineo DAH che sarebbe acuto, o retto, o ottuso, lo che non può essere. Ma gli angoli BAD, BAH debbono supporsi uguali; dunque essi sono retti.

Quindi conseguita la seguente proposizione: *perchè un angolo diedro possa essere misurato dall' angolo formato da due rette condotte nei due piani da uno stesso punto della loro comune intersezione*, è necessario *che le due rette sieno perpendicolari a questa intersezione*.

Veduta la qualità *necessaria* dell' angolo rettilineo che vuole assumersi come misura dell' angolo diedro, il seguente teorema serve a far vedere che questa qualità è eziandio *sufficiente*.

Un angolo diedro ha per misura l'angolo rettilineo formato dalle perpendicolari condotte nei due piani da un medesimo punto della loro intersezione comune.

1.° L' angolo formato dalle perpendicolari è lo stesso, qualunque sia il punto della intersezione dal quale esse s' innalzano; poichè conducendo nei piani AC, AE (*fig.* 143.ª) le perpendicolari AD, BC, AF, BE da due punti qualunque della intersezione AB dei piani, BC sarà parallela ad AD, e BE sarà parallela ad AF; gli angoli CBE, DAF sono dunque uguali (402).

Rimane ora a dimostrare che l' angolo rettilineo delle due perpendicolari varia nello stesso rapporto dell' angolo dei piani.

2.° Quando l' angolo diedro $CPOD$ (*fig.* 145.ª) formato dai piani AP, PB è uguale all' angolo diedro $C'P'O'D'$, formato dai piani $A'P'$, $P'B'$, gli angoli rettilinei CPD, $C'P'D'$ formati dalle perpendicolari PC, PD, $P'C'$, $P'D'$, condotte in questi piani alle intersezioni PO, $P'O'$ saranno uguali. Perocchè gli angoli diedri essendo uguali, se si applica il piano $A'P'$ sopra il piano AP in modo che i lati $O'P'$, $P'C'$ dell' angolo retto $O'P'C'$ cadano sopra i lati OP, PC dell' angolo retto OPC, il piano $P'B'$ prenderà la direzione del piano PB, e $O'P'$ cadendo sopra OP, la perpendicolare $P'D'$ ad $O'P'$ cadrà sopra PD perpendicolare ad OP; i due lati $P'C'$, $P'D'$ dell' angolo $C'P'D'$ cadendo sopra i due lati PC, PD dell' angolo CPD, questi due angoli sono uguali.

Reciprocamente, quando gli angoli rettilinei CPD, $C'P'D'$ sono uguali, gli angoli diedri $CPOD$, $C'P'O'D'$ sono altresì uguali. Infatti applicando l' angolo rettilineo $C'P'D'$ sopra il suo uguale CPD in modo che P' cada in P e che i lati $P'C'$, $P'D'$ cadano rispettivamente sopra PC, PD, la perpendicolare $O'P'$ al piano dell' angolo $C'P'D'$ coinciderà necessariamente con la perpendicolare OP al piano dell' angolo CPD; i due piani, i quali formano l' angolo diedro $C'P'O'D'$ coincidono dunque con i piani che formano l' angolo diedro $CPOD$; questi angoli diedri sono dunque uguali.

3.° *L' angolo delle perpendicolari varia nello stesso rapporto dell' angolo diedro.* Infatti si abbiano tre piani qualunque AB', AE', AC' (*fig.* 146.ª), i quali si tagliano lungo una retta AA'; se da un punto qualunque A della intersezione AA' si conducano nei tre piani le perpendicolari AB, AE, AC alla medesima AA', queste perpendicolari si troveranno in un piano perpendicolare ad AA'. Posto ciò, si tratta di provare la seguente proporzione

$$ang.\ diedro\ BAA'C : ang.\ diedro\ BAA'E = ang.\ BAC : ang.\ BAE.$$

Quando gli angoli BAC, BAE sono commensurabili, se si descrive un arco

BEC col centro in *A* e con un raggio qualunque, gli archi *BC*, *BE* staranno nello stesso rapporto degli angoli. Supponiamo che questo rapporto sia quello di $q : q'$; se si divide l'arco *BC* in q parti uguali, una di queste parti sarà contenuta q' volte nell'arco *BE*, in guisa che si avrà

$$ang.\ BAC : ang.\ BAE = q : q'.$$

Conducendo poi un piano per ciascun punto di divisione dell'arco *BC* e per la retta *AA'*, è chiaro (2.°) che l'angolo diedro $BAA'C$ sarà diviso in q parti uguali, e che l' angolo diedro $BAA'E$ conterrà q' di queste parti; si avrà dunque

$$ang.\ diedro\ BAA'C : ang.\ diedro\ BAA'E = q : q'.$$

Queste due ultime proporzioni danno evidentemente

$$ang.\ diedro\ BAA'C : ang.\ diedro\ BAA'E = ang.\ BAC : ang.\ BAE.$$

4.° Nel caso che gli angoli rettilinei *BAC*, *BAE* corrispondenti agli angoli diedri $BAA'C$, $BAA'E$ fossero incommensurabili, si potrebbe provare che ha luogo ancora la stessa verità; ma siccome d' altronde la dimostrazione è in tutto simile a quella data sopra (310) per gli angoli piani, perciò stimiamo inutile il ripeterla. Conchiudasi dunque, essere la proposizione vera in tutti i casi, e l'angolo diedro avere per misura l' angolo rettilineo formato dalle perpendicolari condotte nei piani che lo formano, da un punto qualunque della intersezione dei medesimi piani.

Questo angolo potendo essere acuto, retto, o ottuso, anche l'angolo diedro misurato potrà essere acuto, retto, o ottuso: se è retto, i due piani si dicono *perpendicolari* fra loro.

Risulta pure da questa dimostrazione che un angolo rettilineo doppio, triplo, quadruplo, ec. . . . . . corrisponde a un angolo diedro doppio, triplo, quadruplo, ec. . . . .; e più generalmente, ad un maggior angolo rettilineo corrisponde un angolo diedro maggiore.

406. *Se due piani s' incontrano, la somma dei due angoli adiacenti formati da questi piani è uguale a due angoli retti.*

Sia *AC* (*fig.* 147.ª) un piano il quale incontri il piano *MN*. Per un punto *G* della intersezione *AB* si conduca *ED* perpendicolare a questa stessa intersezione nel piano *MN*, e *GF* perpendicolare ad *AB* nel piano *AC*; gli angoli *FGD*, *FGE* misurano la inclinazione del piano *AC* con le due parti *BN*, *AM* del piano *MN*; ora $FGD + FGE$ è uguale a due angoli retti. Adunque il piano *AC* fa col piano *MN* due angoli adiacenti la somma dei quali è uguale a due angoli retti.

407. *Se due piani si secano, gli angoli opposti al vertice sono uguali.*

Si abbiano i due piani *MN*, *M'N'* (*fig.* 148.ª), i quali si sechino lungo la retta *AB*. Per un punto qualunque *G* di *AB* si conducano nei due piani le rette *CD*, *EF* perpendicolari alla medesima *AB*; gli angoli formati da queste perpendicolari misureranno gli angoli diedri corrispondenti formati dai piani. Ma (269) $EGC = DGF$, $EGD = CGF$. Adunque i due piani *MN*, *M'N'* fanno gli angoli diedri opposti al vertice uguali.

408. ***Due piani paralleli secati da un terzo piano, godono per rap-***

porto agli angoli che formano con questo terzo piano le medesime proprietà, delle quali godono due rette parallele per rapporto ad una terza retta che le tagli.

Infatti se si tagliano due piani paralleli MN, $M'N'$ (*fig. 149.ª*) con un piano $M''N''$, le intersezioni AB, CD saranno parallele (401). Da un punto qualunque A di AB si conduca il piano $M'''N'''$ perpendicolare ad AB; questo piano sarà perpendicolare ancora alla retta CD parallela ad AB, e le sue intersezioni con i piani MN, $M'N'$, $M''N''$ saranno le rette ME, $M'F$, $M''G$: di queste le due prime saranno parallele; $M'F$, $M''G$ saranno perpendicolari a CD; e ME, $M''G$ saranno perpendicolari ad AB. Adunque gli angoli formati dai piani MN, $M'N'$, $M''N''$ saranno misurati dagli angoli formati dalle rette ME, $M'F$, $M''G$. Ora le proprietà delle parallele ME, $M'F$ tagliate dalla retta $M''G$ danno (285)

$$MAC + M'CA = 2 \text{ retti},$$
$$M''AM = M''CM' = GAE = GCF,$$
$$M''AE = M''CF = GAM = GCM'.$$

Adunque il principio enunciato rimane pienamente dimostrato.

409. *Se due piani che si tagliano sono rispettivamente paralleli a due altri piani, la intersezione dei due primi piani è parallela alla intersezione degli altri due, e gli angoli diedri formati dai primi sono uguali rispettivamente agli angoli diedri formati dai secondi.*

S'immaginino i quattro piani AM, AN; $A'M'$, $A'N'$ (*fig. 150.ª*) paralleli due a due, i quali si taglino lungo le rette AB, $A'B'$. Si prolunghi il piano $A'M'$ fino ad incontrare il piano AN in $A''B''$; le intersezioni $A'B'$, $A''B''$ del piano $A''M'$ con i piani paralleli $A'N'$, AN saranno parallele; le intersezioni AB, $A''B''$ del piano AN con i piani paralleli AM, $A''M'$ saranno pure parallele. Ma due rette parallele ad una terza retta sono parallele fra loro (398. 2.º). Adunque le intersezioni AB, $A'B'$ sono parallele fra loro. Dippiù, in virtù del precedente teorema l'angolo diedro $M'B'A'N'$ è uguale a $M'B''A''N$, e questo è uguale ad $MBAN$; adunque sarà $M'B'A'N'$ uguale ad $MBAN$; ciò che dimostra la proposizione enunciata.

410. *Se per una retta perpendicolare ad un piano si fa passare un altro piano, sarà questo secondo piano perpendicolare al primo.*

Se cioè la retta FD (*fig. 151.ª*) è perpendicolare al piano MN, un qualunque altro piano AC che si farà passare per FD, riuscirà perpendicolare ad MN.

Sia AB la comune intersezione dei piani AC, MN; a questa e a qualunque altra retta che pel punto D si conduce nel piano MN sarà perpendicolare la FD (392). Per la qual cosa conducendo pel punto D nel piano MN la DE perpendicolare alla intersezione AB, l'angolo rettilineo FDE sarà retto ed esprimerà (405) la misura dell'angolo diedro $CBAN$. Adunque questo angolo è retto, e quindi il piano AC perpendicolare al piano MN.

411. *Se un piano è perpendicolare ad un altro piano, una retta che in uno di questi piani si conduce perpendicolarmente alla loro comune intersezione, riuscirà eziandio perpendicolare all'altro piano.*

Supponendo il piano AC perpendicolare al piano MN, se nel piano AC

si conduca la perpendicolare DF alla comune intersezione AB, dico essere la DF perpendicolare ancora al piano MN.

Infatti conducendo nel piano MN la retta DE perpendicolare ad AB, sarà l'angolo EDF retto, perchè per ipotesi i piani sono tra loro perpendicolari; adunque FD è nello stesso tempo perpendicolare alle due rette AB, DE poste nel piano MN, e per conseguenza essa è perpendicolare a questo piano (396).

Quindi 1.° supponendo il piano AC perpendicolare al piano MN, se per un punto D della intersezione comune si eleva una perpendicolare al piano MN, questa perpendicolare sarà tutta compresa nel piano AC. Perocchè se così non fosse si potrebbe certamente nel piano AC condurre la perpendicolare DF alla comune intersezione nel punto D, la quale per ciò che si è dimostrato ora, riuscirebbe perpendicolare ancora al piano MN. Adunque dal medesimo punto D si troverebbero alzate due perpendicolari al piano MN, lo che è impossibile.

2.° Se due piani AC, $A'C'$ (*fig.* 152.ª) sono perpendicolari ad un terzo piano MN, la loro comune intersezione PP' sarà perpendicolare a questo terzo piano. Poichè se dal punto P' si alzi la perpendicolare al piano MN, questa perpendicolare dovrà (1.°) trovarsi nell'istesso tempo nel piano AC e nel piano $A'C'$; essa dunque sarà la loro comune intersezione PP'.

412. La scambievole inclinazione di più di due piani, i quali secandosi due a due si riuniscono in un medesimo punto A (*fig.* 153.ª), chiamasi *angolo poliedro*, e più ordinariamente ancora, quantunque impropriamente, come lo fa avvertire il Lacroix nella sua Geometria, appellasi *angolo solido*. Il punto A è il *vertice* dell'angolo poliedro; gli angoli piani BAC, CAD, DAE, . . . che lo comprendono diconsi le sue *facce*; la riunione di queste facce forma la *superficie* dell'angolo poliedro; e le loro intersezioni due a due AB, AC, AD, . . . ne sono le *costole* o gli *spigoli*.

Nell'angolo poliedro si distinguono tanti angoli diedri quante facce vi sono. Esso s'indica o con la sola lettera del vertice, ovvero ancora con la lettera del vertice seguita da tutte le altre lettere che servono a rappresentare rispettivamente un punto di ciascuna costola.

A fine d'indicare il numero delle facce, si sostituisce ordinariamente alla denominazione di angolo poliedro quella di *angolo triedro*, *tetraedro*, *pentaedro*, ec. secondo che le facce sono *tre*, *quattro*, *cinque*, ec. Sono necessarii almeno tre piani per formare un angolo poliedro; quindi l'angolo triedro è il più semplice degli angoli poliedri (*).

Dicesi *piano diagonale* qualunque piano condotto per due costole che non appartengono alla medesima faccia. Per mezzo di un numero conveniente di tali piani, qualunque angolo poliedro può decomporsi in angoli triedri, nella guisa medesima che un poligono qualunque può decomporsi in triangoli per mezzo di diagonali. Finalmente un angolo poliedro si dice *regolare* quando ha tutte le sue facce uguali e tutti i suoi angoli diedri uguali.

413. *In un angolo poliedro formato da tre angoli piani, la somma di due qualunque di questi angoli è sempre maggiore del terzo.*

(*) Un angolo poliedro di più di tre facce può avere uno o più angoli diedri *rientranti*. Noi però supporremo sempre che tutti gli angoli diedri sieno nell'angolo poliedro che si considera *salienti*, supporremo cioè l'angolo poliedro sempre *convesso*, ossia tale che il piano di una sua faccia qualunque prolungato non possa mai tagliarlo.

Per dimostrare questa proposizione, basterà provare che il maggiore dei tre angoli piani è minore della somma degli altri due. Si abbia l'angolo poliedro A (*fig. 154.ª*) formato dai tre angoli piani BAC, CAD, DAB, dei quali CAD sia il maggiore. Nel piano ACD conducasi la retta AE, la quale faccia un angolo $DAE=DAB$; si prenda $AF=AB$; da un punto qualunque C di AC, e per i punti F e B si conducano le rette CD, CB e si congiunga BD. I triangoli DAB, DAF sono uguali, perchè hanno un angolo uguale compreso fra lati rispettivamente uguali; adunque $BD=DF$. Ora $DF+CF<BC+BD$; sarà quindi $CF<BC$.

Ciò posto, i lati AC, AF del triangolo FAC essendo rispettivamente uguali ai lati AC, AB del triangolo BAC, e CF essendo minore di BC, l'angolo CAF sarà minore di BAC (275). Ma gli angoli DAF, DAB sono uguali; adunque

$$CAF+DAF<BAC+DAB\text{, ossia } CAD<BAC+DAB.$$

414. *La somma di tutti gli angoli piani che formano un angolo poliedro qualunque, è sempre minore di quattro angoli retti.*

Si conduca un piano che tagli le facce dell'angolo poliedro A (*fig. 153.ª*), e sia il poligono $BCDEF$ la intersezione del piano con queste facce; si avrà (290. 312) la somma di tutti gli angoli interni di questo poligono, cioè

$$BCD+CDE+DEF+\ldots=(n-2)180°,$$

n indica il numero delle facce dell'angolo poliedro. Ma (413)

$$\begin{aligned} BCD&<ACB+ACD,\\ CDE&<ADC+ADE,\\ DEF&<AED+AEF,\\ &\text{ec.}\ldots\ldots \end{aligned}$$

Adunque

$$ACB+ACD+ADC+ADE+AED+AEF+\ldots>(n-2)180°.$$

D'altronde (289) è chiaro essere

$$ACB+ACD+ADC+ADE+AED+AEF+\ldots=$$
$$=n.180°-(CAD+DAE+EAF+\ldots);$$

sarà quindi

$$(n-2)180°<n.180°-(CAD+DAE+EAF+\ldots),$$

donde si deduce

$$CAD+DAE+EAF+\ldots<360°.$$

415. *Quando i tre angoli piani, i quali formano un angolo triedro sono uguali rispettivamente ai tre angoli piani, i quali formano un secondo angolo triedro, gli angoli piani uguali sono ugualmente inclinati l'uno sull'altro.*

S'immaginino i due angoli poliedri A, A' (*fig.* 155.ª) formati da tre angoli piani rispettivamente ugnali, sicchè si abbia

$$BAC=B'A'C',\ CAD=C'A'D',\ DAB=D'A'B'.$$

A fine di dimostrare che l'angolo formato dai piani ACB, ACD è ugnale all' angolo formato dai piani $A'C'B'$, $A'C'D'$, basta far vedere che gli angoli rettilinei, i quali misurano questi angoli diedri, sono fra loro uguali. Ora da un punto qualunque C della intersezione AC dei piani ACB, ACD conducendo iu questi piani le rette CB, CD perpendicolari alla stessa AC, l'angolo rettilineo BCD misurerà l'angolo diedro $BACD$. Prendendo inoltre $A'C'=AC$, e conducendo uei piani $A'C'B'$; $A'C'D'$ le rette $C'B'$, $C'D'$ perpendicolari alla loro intersezione $A'C'$, l'angolo rettilineo $B'C'D'$ misnrerà l'angolo diedro $B'A'C'D'$. Basta dunque dimostrare che gli angoli BCD, $B'C'D'$ sono ugnali. Ciò non presenta alcuna difficoltà, poichè gli angoli BAC, $B'A'C'$ essendo ugnali per ipotesi, e gli angoli BCA, $B'C'A'$ essendo retti per costruzione, i triangoli ABC, $A'B'C'$ hanno nn lato ugnale $AC=A'C'$ e gli angoli adiacenti uguali. Nella medesima guisa si dimostrerebbe la uguaglianza dei triangoli ADC, $A'D'C'$. Adunque

$$BC=B'C',\ CD=C'D',\ AB=A'B',\ AD=A'D'.$$

Per la qual cosa i triangoli ABD, $A'B'D'$, avendo nn angolo ugnale $BAD=$ $=B'A'D'$ compreso fra lati uguali, sono ugnali, e perciò $BD=B'D'$, e quindi i triangoli BCD, $B'C'D'$ che hanno i lati rispettivamente ugnali, sono uguali; donde conseguita finalmente la uguaglianza degli angoli rettilinei BCD, $B'C'D'$, e quella per conseguenza degli angoli diedri $BACD$, $B'A'C'D'$.

416. Allorchè le rette AB, $A'B'$ sono situate dalla medesima parte rapporto ai piani CAD, $C'A'D'$, gli angoli triedri A, A' sono uguali. Ma se le rette AB, $A'B'$ cadano da differenti parti rapporto ai piani CAD, $C'A'D'$, gli angoli triedri non possono più coincidere; si dice allora che questi angoli sono ***uguali per simmetria***, perchè tutte le parti, dalle quali sono costituiti sono le stesse, ma però disposte in ordine inverso.

Siffatte cose possono agevolmente spiegarsi nel modo seguente. Essendo gli angoli CAB, CAD rispettivamente ugnali agli angoli $C'A'B'$, $C'A'D'$, ed i piani di questi angoli inclinati ugualmente, ove le rette AB, $A'B'$ cadano dalla medesima parte per rispetto ai piani CAD, $C'A'D'$, ponendo gli angoli ugnali CAD, $C'A'D'$ l'uno sopra l'altro in modo che i loro lati coincidano, i piani CAB, $C'A'B'$ coincideranno ancora, ed AB cadrà sopra $A'B'$. In siffatta guisa i piani degli angoli triedri A, A' coincideranno, e per conseguenza questi angoli saranno assolutamente uguali. Ma allorchè la retta AB è situata sul davanti del piano CAD, e la retta $A'B'$ è situata dietro il piano $C'A'D'$, per esempio in $A'E'$, se si pone l'angolo $C'A'D'$ sopra il suo uguale CAD, i piani $C'A'E'$, $D'A'E'$ cadranno dietro il piano CAD, e la loro comune intersezione $A'E'$ cadrà in AE dietro il piano CAD, mentre la retta AB si troverà sul davanti di questo medesimo piano; le facce adunque degli angoli triedri A, A' non potranno coincidere, e perciò la uguaglianza di questi stessi angoli triedri non potrà in tal caso dirsi assoluta o di soprapposizione; quindi essa merita di essere distinta con una denominazione particolare, e noi col celebre Legendre

la chiameremo *uguaglianza per simmetria*. Per la qual cosa diremo *uguali per simmetria* o semplicemente *simmetrici* i due angoli A, A', allorchè questi vengono formati da tre angoli piani uguali rispettivamente, ma disposti in ordine inverso.

Ciò che è detto si estende agevolmente agli angoli poliedri formati da più di tre angoli piani: per esempio un angolo poliedro formato dagli angoli piani a, b, c, d, e, ed un altro angolo poliedro formato dai medesimi angoli in ordine inverso a, e, d, c, b possono essere tali che i piani nei quali sono gli angoli ugnali sieno ugualmente inclinati fra loro. Questi due angoli poliedri, che sarebbero uguali senza che fosse possibile la loro sopprapposizione, si diranno *uguali per simmetria*, o *simmetrici*.

417. *Dati i tre angoli piani, i quali compongono un angolo triedro, trovare con una costruzione eseguita nel piano l' angolo che fanno due qualunque degli angoli dati.*

Proposto un angolo triedro $OABC$ (*fig.* 156.ª), nel quale si suppongono conosciuti i tre angoli piani AOB, BOC, COA, si cerca per mezzo di una costruzione eseguita nel piano, conoscere l'angolo che fanno due qualunque di questi angoli piani per esempio AOB, BOC.

Nel piano dell' angolo BOC, e sopra i suoi lati OB, OC si facciano gli angoli BOD, COE uguali rispettivamente agli angoli BOA, COA del proposto angolo triedro; sopra OD prendasi ad arbitrio un punto D, e si faccia $OE=OD$; dai punti D ed E si abbassino le rette DB ed EC perpendicolari rispettivamente ad OB ed OC; si prolunghino queste perpendicolari finchè s'incontrino in P; da questo punto si elevi PQ perpendicolare a PB, e fatto centro in B, con un raggio uguale a BD, si descriva il semicerchio DQd il quale tagli PQ in Q; si unisca il punto B col punto Q con la retta BQ: io dico essere l'angolo QBP la misura dell' angolo d' inclinazione dei due piani AOB, BOC.

Per dimostrare ciò, si prenda sulla costola dell' angolo triedro, la quale rimane elevata sul piano BOC, una lunghezza $OA=OD$, e si conducano le rette AB, AC, AP. Il triangolo OBA risulterà uguale al triangolo OBD avendo questi due triangoli un angolo uguale compreso fra lati rispettivamente uguali; sarà quindi $BA=BD$, e l'angolo $OBA=OBD$; ma per costruzione l'angolo OBD è retto; adunque anche retto sarà l'angolo OBA, e perciò OB perpendicolare ad ambedue le rette BA, BP sarà (396) eziandio perpendicolare al piano APB, e per conseguenza il piano BOC, il quale passa per OB, sarà (410) perpendicolare al piano APB, ovvero, ciò che è lo stesso, il piano APB sarà perpendicolare al piano BOC. Similmente si dimostrerà essere il piano ACP perpendicolare al piano BOC. Adunque la retta AP intersezione comune dei due piani APB, ACP è (411. 2.°) perpendicolare al piano BOC, e quindi l'angolo APB è retto. Ciò posto è chiaro che i triangoli rettangoli APB, BPQ che hanno le ipotenuse AB, BQ uguali, e il lato BP comune sono uguali, e che perciò l'angolo $ABP=QBP$. Ma l'angolo ABP misura la inclinazione dei piani AOB, BOC, essendo AB, BP perpendicolari ambedue alla intersezione OB; adunque l'angolo QBP misurerà questa stessa inclinazione, come si voleva dimostrare.

La costruzione precedente si rende impossibile allorchè il terzo angolo COE è maggiore della somma o anche minore della differenza dei due altri BOC, BOD. Infatti per eseguire quella costruzione fa d' uopo che BP sia minore di BD. Posto ciò, se si conduce DF perpendicolare ad OC, e si prolunga finchè in G incontri la circonferenza $DfgG$ del cerchio descritto col centro O e col raggio

OD, sarà l'angolo $FOG = FOD$ (299), e per conseguenza l'angolo $COG = COD = BOC + BOD$. Similmente se si conduce la retta df perpendicolare ad OC e si prolunga finchè nel punto g incontri la circonferenza $DdgG$ del medesimo cerchio, sarà l'angolo $COg = COd = BOC - BOd = BOC - BOD$. Ora è chiaro che se COE è maggiore di COG, o anche minore di COg, la perpendicolare EC che si conduce ad OC da un punto E della circonferenza del cerchio $DdgG$, non segherà Dd fra i punti D e d, e non sarà perciò BP minore di BD o Bd. Adunque la succennata costruzione si renderà impossibile quantunque volte il terzo angolo COE sarà maggiore della somma degli altri due BOC, BOD, o anche minore della loro differenza; i limiti poi della sua possibilità sono quelli stabiliti sopra.

418. La costruzione della quale si è parlato nel numero precedente, convenientemente modificata, serve altresì a trovare il terzo angolo COA, qualora si conoscano i due AOB, BOC, e il loro angolo d'inclinazione. Infatti, se PBQ si fa uguale all'angolo d'inclinazione, e se BQ si prende uguale a BD, il punto P si determinerà senza difficoltà conducendo QP perpendicolare a BP; e quindi si otterrà l'angolo COE, o COA conducendo PC perpendicolare ad OC, e prolungandola fino all'incontro in E della circonferenza DGg.

CAPO XIX.

DEI SOLIDI POLIEDRI.

419. Chiamasi in generale *solido poliedro* o semplicemente *poliedro* quello che vien terminato da tutte le parti da superficie piane, le quali si dicono le *facce* del solido. In particolare poi si chiama *tetraedro* quello che ha quattro facce; *essaedro* quello che ne ha sei; *ottaedro* quello che ne ha otto; *dodecaedro* quello che ne ha dodici; *icosaedro* quello che ne ha venti; ec.

La intersezione comune di due facce adiacenti, dicesi *lato* ovvero *costola* del poliedro.

Per solido poliedro *regolare* s'intende quello, di cui tutte le facce sono poligoni regolari uguali, e di cui tutti gli angoli poliedri sono fra loro uguali. Ora può agevolmente dimostrarsi che *i poliedri regolari non possono essere più di cinque*. Infatti se le facce del solido sono triangoli equilateri, ciascun angolo poliedro del medesimo solido non può essere composto che o di tre, o di quattro, o di cinque angoli di questi triangoli (414); quindi conseguita non poter essere più di tre i solidi poliedri terminati da facce, le quali tutte sieno triangoli equilateri uguali. Se le facce del solido poliedro sono quadrati, ogni suo angolo non può essere formato che da tre soli angoli di questi quadrati; donde si deduce non potersi dare più di un solido poliedro, le cui facce sieno quadrati tutti fra loro uguali. Finalmente se le facce del poliedro sono pentagoni regolari, anche qui ciascun suo angolo non può essere contenuto che da tre soli angoli di siffatti pentagoni, e per conseguenza non può darsi più di un so-

lido poliedro di cui tutte le facce sieno pentagoni regolari uguali. Nè si può andare oltre, poichè tre angoli di esagono regolare equivalgono a quattro retti, e perciò non possono formare un angolo poliedro, e per la ragione medesima non possono formare un angolo poliedro tre angoli di ottagono regolare che equivalgono a più di quattro retti, ec.

Non sono dunque possibili che cinque soli poliedri regolari; tre formati con triangoli equilateri, il tetraedro cioè, l' ottaedro, e l' icosaedro; uno con quadrati, ed è l' essaedro; ed un altro finalmente con pentagoni regolari, che è il dodecaedro.

Fu dagli antichi dimostrato, e trovasi averne trattato altresì Euclide nel libro XIII, che i cinque succennati poliedri regolari esistono realmente, e che se ne possono determinare tutte le dimensioni quantunque volte si conosca una delle lor facce; noi però avendoci fin dal principio proposto di non protrarre molto a lungo questi elementi, di buon grado ci asterremo dal mentovare quanto da essi, e dagli altri ancora più moderni intorno a tal materia fu detto (*).

420. Quel solido poliedro che vien terminato da due poligoni uguali e paralleli, e da altrettanti parallelogrammi quanti sono i lati dei poligoni, si chiama *prisma* (*fig.* 158.ª). I poligoni uguali e paralleli, si dicono le *basi* del prisma. La distanza fra le basi, o la perpendicolare abbassata da un punto della base superiore sopra il piano della inferiore è l' *altezza* del prisma.

Il prisma è *retto* allorchè i lati dei parallelogrammi, che costituiscono la sua *superficie convessa* o *laterale* (**), sono perpendicolari ai piani delle basi, nel qual caso ciascuno di questi lati agguaglia l'altezza del prisma. In qualunque altro caso il prisma è *obliquo*, e l' altezza è minore del lato.

Il prisma si appella *triangolare*, *quadrangolare*, *pentagono*, *esagono*, ec. secondo che la base è un triangolo, un quadrilatero, un pentagono, un esagono, ec. Se la base è un parallelogrammo, il prisma è terminato da sei facce tutte parallelogramme, e si chiama *parallelepipedo* (*fig.* 160.ª).

Il parallelepipedo dicesi *rettangolo*, allorchè tutte le sue facce sono parallelogrammi rettangoli. Fra i parallelepipedi rettangoli si distingue l' essaedro regolare terminato da sei quadrati uguali, il quale solido dai geometri si nomina *cubo*.

421. Si chiama *piramide* il poliedro formato da più piani triangolari, i quali partono da un medesimo punto e vanno a terminare ai differenti lati di un medesimo poligono (*fig.* 166.ª). Questo poligono è la *base* della piramide, il complesso dei piani triangolari dicesi *superficie convessa* o *laterale* della piramide, il punto da cui partono questi piani triangolari si chiama *vertice* della piramide, e la perpendicolare abbassata dal vertice sopra il piano della base è l' *altezza* della piramide.

La piramide si dice *triangolare*, *quadrangolare*, *pentagona*, ec. secondo che la sua base è un triangolo, un quadrilatero, un pentagono, ec.

(*) Fra i non pochi Geometri moderni i quali si sono occupati dei solidi poliedri regolari, merita di essere consultato il Vincent: Cours de Géométrie élémentaire: troisième edition Paris 1834: liv. III; chap. VI; §. II.

(**) Tutti i poliedri che noi consideriamo sono poliedri ad angoli salienti, o poliedri convessi. Chiamiamo così quelli la cui superficie non può essere incontrata da una linea retta in più di due punti. È chiaro poi che in un poliedro di tal fatta il piano di una faccia prolungato non mai può secare il solido, e perciò è impossibile che questo solido si trovi parte al di sopra, e parte al di sotto di quel piano.

422. Due solidi poliedri si dicono *simmetrici*, allorchè possono situarsi uno al di sopra, e l'altro al di sotto di un piano MN (*fig.* 157.ª) in guisa tale che i vertici A, A'; B, B'; C, C'; ec. dei loro angoli poliedri sieno due a due ugualmente distanti da MN e sopra una stessa perpendicolare AaA', BbB', CcC', ec. a questo piano. Sia D il vertice di un altro angolo poliedro del primo solido, abbassando DdD' perpendicolare al piano MN, e prendendo $dD'=dD$, sarà D' il vertice dell'angolo omologo nel secondo solido.

Posto ciò, pieghiamo il trapezio $ABba$ lungo la retta ab, le linee Aa, aA' uguali e perpendicolari sopra MN, coincideranno, come pure Bb, e bB'; quindi $AB=A'B'$. Con ciò resta dimostrato che *le linee omologhe nei poliedri simmetrici sono uguali.*

Ora essendo $AB=A'B'$, $BC=B'C'$, $AC=A'C'$, il triangolo ABC sarà uguale al triangolo $A'B'C'$; donde conseguita che *nei poliedri simmetrici i triangoli omologhi sono uguali.*

Inoltre, avendosi il triangolo $ADC=A'D'C'$, $BDC=B'D'C'$, sarà l'angolo $DCB=D'C'B'$, $ACD=A'C'D'$, $ACB=A'C'B'$. Per la qual cosa, se i piani di questi angoli formano in C e C' angoli triedri, questi angoli saranno uguali; dal che si ricava (415. 416) che *nei poliedri simmetrici gli angoli diedri e triedri omologhi sono uguali. Lo stesso ha luogo per gli angoli poliedri omologhi*, poichè questi angoli sono composti (412) di angoli triedri rispettivamente uguali. Che se i punti A, B, C, D sono nel medesimo piano, siccome l'angolo $DCB=ACD+ACB$, così si ha $D'C'B'=A'C'D'+A'C'B'$, donde risulta (413) che i punti A', B', C', D' sono pure nel medesimo piano; s'inferisce da ciò che *le facce omologhe dei poliedri simmetrici sono uguali*, perchè composte di triangoli uguali rispettivamente, e similmente disposti.

Da quanto è detto finora si deduce 1.° che *nei poliedri simmetrici tutte le parti omologhe che li costituiscono sono uguali.*

È però da osservarsi che la uguaglianza fra gli angoli poliedri omologhi nei solidi simmetrici, è uguaglianza di simmetria; poichè se, per esempio, l'angolo C è formato dai piani BCA, ACD, DCE, ec., il suo omologo C' è formato dai piani $B'C'A'$, $A'C'D'$, $D'C'E'$, ec. Questi piani sembrano disposti nel medesimo ordine che gli altri; ma riflettendo che i due angoli poliedri sono in una situazione inversa l'uno per rapporto all'altro, si vedrà chiaro che la disposizione reale dei piani che formano l'angolo C' è la inversa di quella che ha luogo nei piani che formano l'angolo C.

2.° Che *due poliedri simmetrici sono equivalenti tra loro, ossia uguali in solidità.*

423. *Due prismi, i quali hanno un angolo poliedro compreso da piani rispettivamente uguali e similmente disposti sono uguali.*

Nei due prismi AI, $A'I'$ (*fig.* 158.ª) suppongasi la base $ABCDE=A'B'C'D'E'$, la faccia $ABGF=A'B'G'F'$, e la faccia $AEKF=A'E'K'F'$; i due angoli poliedri A ed A' compresi da angoli piani rispettivamente uguali e similmente disposti, saranno uguali fra loro (415.416), e perciò potrà l'uno perfettamente coincidere con l'altro. Ora dalla coincidenza degli angoli A ed A' ne consegnita evidentemente la coincidenza delle basi e delle altre corrispondenti facce dei due prismi AI, $A'I'$. Questi due prismi adunque sono uguali.

Da siffatta proposizione si deduce l'altra seguente: *due prismi retti che hanno basi ed altezze uguali, sono uguali.* Infatti se il lato $AB=A'B'$, e l'altezza $BG=B'G'$, il rettangolo $ABGF=A'B'G'F'$. Per la stessa ragione

il rettaogolo $AEKF = A'E'K'F'$. Adunque i tre piani che formano l' angolo poliedro A del prisma AI sono nguali rispettivamente ai tre piani che formano l' aogolo poliedro A' del prisma $A'I'$. Aduoque questi due prismi sono uguali.

424. *In un prisma qualunque le intersezioni fatte da piani paralleli sono poligoni uguali.*

Il prisma AI (*fig.* 159.ª) si supponga secato da due piani paralleli, e sieno $abcde$, $a'b'c'd'e'$ le due ioterseziooi ; dico essere $abcde = a'b'c'd'e'$.

Infatti i lati ab, $a'b'$ sooo paralleli (401), e compresi fra i lati AF, BG anch'essi paralleli; adunque $ab = a'b'$ (292). Per la medesima ragione i lati bc, cd,... della intersezione $abcde$ sono rispettivameote oguali ai lati $b'c'$, $c'd'$, ... della intersezione $a'b'c'd'e'$. D' altronde , i lati uguali esseodo eziandio paralleli e diretti nel medesimo seoso, gli aogoli abc, bcd, cde, . . . della prima intersezione sooo rispettivamente uguali agli angoli $a'b'c'$, $b'c'd'$, $c'd'e'$,. . . della seconda (402). Adunque queste due intersezioni sono poligooi perfettamente uguali.

Quindi conseguita che la intersezione fatta in un prisma da uo piano parallelo alla sua base , è nguale a qoesta base.

425. *In ogni parallelepipedo le facce opposte sono uguali e parallele.*

Sia AG (*fig.* 160.ª) un parallelepipedo; dalla definizione di qnesto solido le basi $ABCD$, $EFGH$ sooo parallelogrammi ugoali, ed i lati dell' uno sooo rispettivamente paralleli ai lati dell' altro. Ora io dico che questo stesso ha loogo per due facce laterali opposte , come $AEHD$, $BFGC$. Imperocchè essendo AD, AE oguali e parallele rispettivameote a BC, BF, è chiaro che l' angolo DAE è oguale all' angolo CBF, che il piano di quello è parallelo al piano di qoesto (402) , e che per conseguenza il parallelogrammo $AEHD$ è ugoale e parallelo al parallelogrammo $BFGC$. Similmeote dimostrasi essere il parallelogrammo $ABFE$ uguale e parallelo al parallelogrammo $DCGH$. Adunque ec.

Poichè dnnque il parallelepipedo è uo solido termioato da sei facce parallelogramme , di cui le opposte sooo oguali e parallele, una faccia qualuoqoe e la sua opposta potranoo ad arbitrio preodersi per le basi del parallelepipedo.

426. *Un qualunque parallelepipedo si divide in due prismi triangolari simmetrici dal piano che passa per due lati paralleli opposti.*

Per i doe lati paralleli opposti BF, DH (*fig.* 161.ª) del parallelepipedo AG si faccia passare il piaoo $BDHF$; i due solidi $ABDHEF$, $GHFBCD$, nei qnali verrà diviso questo parallelepipedo , dico essere prismi triangolari simmetrici l' ooo dell' altro.

Che il solido $ABDHEF$ sia un prisma triangolare , è chiaro , perchè essendo i lati AB, AD nguali e paralleli rispettivamente ai lati EF, EH, i due triangoli ABD, EFH sooo (402.270) ugoali e paralleli,e le facce laterali $ABFE$, $ADHE$, $BDHF$ sooo parallelogrammi (294). Nella medesima goisa ci persuaderemo essere il solido $GHFBCD$ uo prisma triangolare.

Dimostro ora che qnesti due prismi sono simmetrici l' uno dell' altro. Sopra la base ABD si concepisca costrutto il prisma $ABDH'E'F'$ che sia il simmetrico del prisma $ABDHEF$. Dal detto sopra (422) la faccia $ABF'E'$ è uguale alla omologa $ABFE$, e la faccia $ADH'E'$ è oguale alla omologa $ADHE$. Ma paragonando il prisma $GHFBCD$ al prisma $ABDH'E'F'$, la base GHF è uguale alla base ABD , la faccia $GHDC$, che è uguale ad $ABFE$ (425) , è pure ugoale ad $ABF'E'$, e la faccia $GFBC$, che è uguale ad $ADHE$, è nguale ancora ad $ADH'E'$; per conseguenza i tre piani fra quali è compreso l' angolo triedro G del prisma $GHFBCD$ sono rispettivamente uguali ai tre piani fra

quali è compreso l'angolo triedro A del prisma $ABDH'E'F'$: essi d'altronde sono disposti similmente; adunque i due prismi $GHFBCD$, $ABDH'E'F'$ sono uguali in modo che sopprapposti coincidono (423). Ma il prisma $ABDH'E'F'$ è per costruzione simmetrico del prisma $ABDHEF$; dunque anche il prisma $GHFBCD$ è simmetrico del prisma $ABDHEF$.

Dal teorema dimostrato ora s'inferisce che in un parallelepipedo qualunque gli angoli diedri opposti sono uguali, e gli angoli triedri opposti sono simmetrici (422.1.°).

427. *I parallelepipedi che hanno la medesima base e la medesima altezza, sono equivalenti.*

Sieno AG, AL (*fig. 162.ª*) due parallelepipedi della medesima base e della medesima altezza. Supponendo primieramente che essi vengano lateralmente compresi da due piani paralleli, i due lati EF, HG si troveranno in linea retta con i lati IK, ML, e i due prismi triangolari $AEIMDH$, $BFKLCG$ saranno uguali, perchè contenuti da facce rispettivamente uguali e similmente disposte (423). Ora se da tutto il solido $ABCDHEKL$ si toglie il prisma $AEIMDH$, resta il parallelepipedo AL, e se dal medesimo solido si toglie il prisma $BFKLCG$, resta il parallelepipedo AG. Adunque i parallelepipedi AG, AL sono equivalenti.

Che se poi i parallelepipedi AG, AL della medesima base e della medesima altezza non sono compresi lateralmente da piani paralleli come nella *fig. 163.ª*, prolungando i lati delle loro basi superiori HE, GF, LM, KI finchè s'incontrino in N, O, P, Q, si otterrà un terzo parallelepipedo AP, il quale per ciò che si è ora dimostrato, è equivalente a ciascuno dei due parallelepipedi AG, AL. Adunque i parallelepipedi AG, AL sono equivalenti.

Quindi conseguita potersi sempre costruire un parallelepipedo rettangolo equivalente ad un parallelepipedo qualunque dato. Infatti da ciascun angolo della base inferiore $ABCD$ (*fig. 164.ª*) alzando le perpendicolari al piano di questa, si può facilmente costruire un parallelepipedo retto AG equivalente al proposto, che è inutile rappresentare nella figura. Conducendo quindi AI, BK perpendicolari a DC nella base $ABCD$, si formerà sopra $ABKI$ il parallelepipedo rettangolo AL, il quale essendo equivalente ad AG, poichè ha la stessa base $ABFE$ e la stessa altezza AI, sarà per conseguenza equivalente ancora al parallelepipedo proposto.

428. *Due parallelepipedi rettangoli che hanno la stessa base, stanno tra loro come le rispettive altezze.*

Se queste altezze hanno una comune misura, dividendo i solidi in parti uguali per mezzo di piani paralleli alle loro basi, si ragionerà per essi come per i rettangoli (334), lo che si farà ancora nel caso in cui le altezze sono incommensurabili.

Vicendevolmente, *due parallelepipedi rettangoli che hanno la medesima altezza, stanno tra loro come le basi.*

Chiamando P, P' i due parallelepipedi rettangoli, collochiamoli in modo da far coincidere uno dei loro angoli poliedri, e la loro costola uguale; le basi saranno disposte come $ABCD$ (*fig. 165.ª*) per P, e come $AIKN$ per P'. Prolungando ora NK in O, il parallelepipedo P'' costrutto sopra la base AO e con l'altezza medesima dei parallelepipedi P, P' può considerarsi come avente AN per altezza, e la faccia AF per base; donde $\frac{P}{P''}=\frac{AD}{AN}$. Dippiù prendendo

la faccia $ANME$ per base dei parallelepipedi P'', P', le loro altezze saranno AB, AI, e perciò si avrà $\frac{P''}{P'} = \frac{AB}{AI}$. Moltiplicando queste proporzioni fra loro, risulterà

$$\frac{P}{P'} = \frac{AD \times AB}{AN \times AI}:$$

Ma (336) il prodotto $AD \times AB$ è uguale alla base $ABCD$, il prodotto $AN \times AI$ è uguale alla base $AIKN$. Adunque ec.

429. *Due parallelepipedi rettangoli qualunque, stanno tra loro come i prodotti delle basi per le rispettive altezze.*

Imperocchè se le basi sono $ABCD$, $AIKN$, e le altezze AE, AQ; prolungando le facce di quello che ha un' altezza minore, e che chiamiamo p, fino alla base superiore dell' altro che dinotiamo con P, si formerà un parallelepipedo $AL=P'$ che avrà l' altezza medesima di P, e la stessa base di p. Si otterrà (428) dunque da una parte $\frac{P'}{p} = \frac{AE}{AQ}$, e dall' altra $\frac{P}{P'} = \frac{ABCD}{AIKN}$; donde si dedurrà

$$\frac{P}{p} = \frac{ABCD \times AE}{AIKN \times AQ}.$$

Rappresentando dunque con a, b, c le tre costole AB, AD, AE che formano l' angolo triedro A del parallelepipedo P, e con a', b', c' le tre AI, AN, AQ del parallelepipedo p, si avrà $\frac{P}{p} = \frac{a.b.c}{a'.b'.c'}$. Dal che chiaro apparisce, che per misurare un parallelepipedo rettangolo P, ossia per trovare il suo rapporto con un altro p, il quale si considera come unità di misura, fa d' uopo cercare i rapporti $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$, $\frac{c}{c'}$ tra le rispettive costole che formano un angolo triedro, e quindi moltiplicare questi rapporti tra loro. Sia l il loro prodotto, sarà l un numero astratto, il quale ci dinoterà il numero delle volte che il parallelepipedo P contiene il parallelepipedo p.

430. *La solidità di un parallelepipedo rettangolo è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza, quando si prende per unità di solidità il cubo che ha per lato la unità lineare.*

Noi abbiamo (429) in generale

$$P:p = a.b.c:a'.b'.c'.$$

Ora supponendo che p sia un cubo che ha per lato la unità lineare, supponendo cioè che sia $a'=b'=c'=1$; si avrà

$$P:p = a.b.c:1.$$

Per la qual cosa, se p si prenda come unità di misura rispetto ai solidi, il parallelepipedo P risulterà uguale al prodotto $a.b.c$, che è il prodotto della sua base $a.b$ per la sua altezza c.

Allorchè $a=b=c$, si otterrà $P=a^3$: di qui deriva la denominazione di *cubo* data alle potenze terze (102).

431. *La solidità di un prisma qualunque si esprime pel prodotto della sua base per la sua altezza.*

Se il prisma è un parallelepipedo qualunque, essendo esso equivalente ad un parallelepipedo rettangolo che abbia l'altezza medesima e la base equivalente (427), è chiaro che sarà come questo uguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

Se il prisma è triangolare, esso è la metà di un parallelepipedo che abbia la stessa altezza ed una base doppia (426.422.2.°). Ora la solidità di questo è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza; quella dunque del prisma triangolare, sarà uguale al prodotto della sua base, metà di quella del parallelepipedo, per la sua altezza.

Finalmente un prisma qualunque può essere diviso in tanti prismi triangolari della medesima altezza quanti sono i triangoli, nei quali si può dividere la sua base poligona. Ora ciascuno di questi prismi triangolari è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza. Adunque, poichè l'altezza è la stessa per tutti, sarà la somma di tutti i prismi parziali uguale alla somma di tutti i triangoli che servono loro di basi, moltiplicata per la comune altezza. Adunque la solidità di un prisma qualunque è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

Quindi si deduce che i prismi della medesima altezza stanno fra loro come le basi, e i prismi della medesima base stanno fra loro come le altezze.

432. *Se una qualunque piramide è secata da un piano parallelo alla base, la sua altezza ed i suoi lati saranno secati in parti proporzionali, e la sezione sarà un poligono simile alla base.*

Se la piramide $VABCDE$ (*fig.* 166.ª) si supponga secata con un piano parallelo alla sua base, in modo che si abbia la sezione $abcde$; dico primieramente che i lati VA, VB, VC, VD, VE, e l'altezza VO della piramide saranno secati in a, b, c, d, e ed in o proporzionalmente. Imperocchè essendo (401) i lati ab, bc, cd, . . . della sezione, paralleli rispettivamente ai lati AB, BC, CD, . . . della base, i triangoli VAB, VBC, VCD, . . . sono rispettivamente simili ai triangoli Vab, Vbc, Vcd, . . . ; per conseguenza (348.1.°)

$$Va:aA=Vb:bB=Vc:cC=\text{ec.}$$
$$VA:Va=VB:Vb=VC:Vc=\text{ec.}$$
$$VA:aA=VB:bB=VC:cC=\text{ec.}$$

Parimenti essendo bo parallela a BO, il triangolo VBO è simile al triangolo Vbo, e perciò $Vb:bB=Vo:oO$. Adunque ec. . .

Dico inoltre che la sezione $abcde$ è un poligono simile alla base $ABCDE$. Infatti gli angoli abc, bcd, cde, . . . sono (402) uguali rispettivamente agli angoli ABC, BCD, CDE, . . . , e dippiù

$$ab:AB=bc:BC=cd:CD=\text{ec.}$$

Adunque (347) ec.

433. Due piramidi $VABCDE$, $VXYZ$ le quali hanno il vertice V comune e la medesima altezza VO, avranno evidentemente le basi $ABCDE$, XYZ situate sopra un medesimo piano. Ora io dico che *secando queste due piramidi*

con uno stesso piano parallelo a quello delle loro basi, le sezioni staranno tra loro come queste basi.

Sieno $abcde$, xyz le sezioni; avremo (432.362)

$$ABCDE:abcde=(AB)^2:(ab)^2=(VA)^2:(Va)^2,$$
$$XYZ:xyz=(XY)^2:(xy)^2=(VX)^2:(Vx)^2.$$

Ora appartenendo le due sezioni al medesimo piano, si ha $VA:Va=VX:Vx$. Adunque

$$ABCDE:abcde=XYZ:xyz\,,\ \text{ossia}\ abcde:xyz=ABCDE:XYZ.$$

Quindi s'inferisce che le sezioni $abcde$, xyz fatte ad uguali altezze sono equivalenti, quante volte le basi $ABCDE$, XYZ sono equivalenti.

434. Nella piramide triangolare $VABC$ (*fig.* 167.ª) si divida il lato CV in un determinato numero di parti uguali, per esempio in tre Cc, cc', $c'V$, : per i punti c, c', V di divisione si conducano dei piani paralleli alla base ABC e quindi s'intendano costrutti in ciascun segmento i prismi triangolari interni $pqCcmn$, $p'q'cc'm'n'$, e gli esterni $ABCcab$, $mncc'a'b'$, $m'n'c'Va''b''$; i solidi Bm, nm', $m'n'c'Va''b''$ presi insieme, daranno l'eccesso dei prismi esterni sopra gl'interni. Ma essendo (403.420.431) $m'n'c'Va''b''=p'q'cc'm'n'$, sarà $nm'+$ $+m'n'c'Va''b''=mncc'a'b'=pqCcmn$, e conseguentemente $Bm+nm'+$ $+m'n'c'Va''b''=ABCcab$. Adunque l'eccesso dei prismi esterni sopra gl'interni, agguaglia il primo prisma esterno. Ora se il numero delle parti uguali in cui si divide il lato CV si faccia crescere all'infinito, il primo prisma esterno diventerà sempre più piccolo, con che l'eccesso dei prismi esterni sopra gl'interni, e molto più l'eccesso dei prismi esterni sulla piramide si potrà rendere minore di una qualunque data comunque piccola quantità solida.

435. *Due piramidi triangolari, le quali hanno le basi equivalenti, e le altezze uguali, sono equivalenti.*

Se le due piramidi triangolari $VABC$, $V'A'B'C'$, le quali hanno le basi ABC, $A'B'C'$ equivalenti, e le altezze uguali, non fossero equivalenti, una di esse, per esempio $VABC$, sarebbe maggiore dell'altra $V'A'B'C'$ di una certa quantità che chiamo D. Ora si concepisca intorno alla piramide $V'A'B'C'$ descritto un numero di prismi esterni tale che la differenza tra i prismi e la piramide sia minore della quantità D (434); secondo la supposizione già fatta, sarebbe la piramide $VABC$ maggiore ancora della somma di questi prismi. Per lo che supponendo intorno alla piramide $VABC$ descritto un ugual numero di prismi esterni, la somma di questi (che a motivo delle basi equivalenti e delle altezze uguali sono (431) equivalenti rispettivamente ai prismi esterni della piramide $V'A'B'C'$) dovrebbe essere minore della stessa piramide $VABC$, la qual cosa, per essere impossibile, dimostra che la piramide $VABC$ non può non aggnagliare la piramide $V'A'B'C'$. Adunque due piramidi triangolari ec.

436. *Una piramide triangolare qualunque è il terzo del prisma che ha la medesima base e la medesima altezza.*

Si abbia la piramide triangolare $A'ABC$ (*fig.* 168.ª). Dai punti B, C si conducano le linee rette BB', CC' uguali e parallele al lato AA', e si congiungano le rette $A'B'$, $B'C'$; si otterrà in tal guisa il prisma $ABCC'A'B'$, che avrà la medesima base e la medesima altezza della proposta piramide. Ciò fatto,

tirando la diagonale BC', il prisma conterrà, oltre la proposta piramide $A'ABC$, le altre due piramidi triangolari $BB'A'C'$, $A'BCC'$, e sarà

$$ABCC'A'B'=A'ABC+BB'A'C'+A'BCC'.$$

Ma la piramide $BB'A'C'$ è equivalente alla piramide $A'ABC$ (435) : dippiù la stessa $BB'A'C'$, potendosi considerare come avente la base $BB'C'$ ed il vertice A', è ancora equivalente alla piramide $A'BCC'$. Adunque

$$ABCC'A'B'=3A'ABC,\ \text{donde}\ A'ABC=\frac{1}{3}ABCC'A'B'.$$

Da questa proposizione e dal detto nel numero 431, si deduce 1.° che la solidità di una piramide triangolare è misurata dal prodotto della sua base per la terza parte della sua altezza.

2.° Che la solidità di una qualunque piramide poligona è misurata ancora dal prodotto della sua base pel terzo della sua altezza. Infatti una piramide poligona qualunque si compone di tante piramidi triangolari tutte dell' altezza medesima, quanti sono i triangoli che compongono la sua base.

3.° Che due piramidi della medesima altezza stanno fra loro come le basi, e vicendevolmente due piramidi della medesima base stanno fra loro come le altezze.

437. *Se una piramide triangolare sia secata con un piano parallelo alla sua base, il tronco che rimane togliendo la piccola piramide, è uguale a tre piramidi dell' altezza medesima del tronco, le cui basi sono la base inferiore del tronco, la superiore, e la media proporzionale fra queste due.*

Sia $ABCC'A'B'$ (*fig. 169.ª*) un tronco di piramide triangolare a basi parallele. Per i punti A, B', C' facendo passare il piano $AB'C'$, e per A,B',C il piano $AB'C$, il tronco verrà diviso nelle tre piramidi triangolari $B'ABC$, $B'AA'C'$, $B'ACC'$, delle quali la prima è situata sopra la base inferiore del tronco ed ha la medesima altezza che il tronco, e la seconda può considerarsi come situata sopra la base superiore del tronco ed ugualmente alta che il tronco. Per ciò poi che si appartiene alla terza piramide $B'ACC'$, se dal punto B' nel piano $A'ABB'$ si conduca la retta $B'D$ parallela al lato $A'A$, essa riuscirà pure parallela al piano $A'ACC'$ (399). Adunque la piramide $B'ACC'$ è equivalente alla piramide $DACC'$ che ha la medesima base ACC' ed il vertice in D (435). Ora questa piramide $DACC'$, se si consideri situata sulla base ACD e col vertice in C', ha la medesima altezza del tronco, e la sua base ACD è media proporzionale tra le due basi del tronco; infatti essendo l' angolo $CAD=C'A'B'$ ed il lato $AD=A'B'$, sarà (358. 432) il triangolo $ADC:A'B'C'=AC:A'C'=AB:A'B'$; ma (338) il triangolo $ABC:ADC=AB:AD=AB:A'B'$; adunque $ADC:A'B'C'=ABC:ADC$, ossia $A'B'C':ADC=ADC:ABC$. Adunque se una piramide triangolare ec.

438. Ma la solidità di un qualunque tronco piramidale Ac (*fig. 166.ª*) si può sempre ottenere allorchè si conoscono le dimensioni delle basi parallele $ABC\ldots$, $abc\ldots$, dei lati omologhi di queste, come per esempio BC, bc, e dell' altezza oO. Imperocchè essendo (432. 246)

$$VO-Vo:Vo=BC-bc:bc,$$

sarà $Vo = \frac{bc.oO}{BC-bc}$, e perciò (436) la piramide

$$Vabc\ldots = \frac{1}{3}\cdot\frac{bc.oO}{BC-bc}\,abc\ldots,$$

e la piramide

$$VABC\ldots = \frac{1}{3}\,(Vo+oO)ABC\ldots = \frac{1}{3}\cdot\frac{BC.oO}{BC-bc}\,ABC\ldots$$

Ora il tronco $Ac = VABC\ldots - Vabc\ldots$. Adunque

$$Ac = \frac{1}{3}\,oO\left(\frac{BC.ABC\ldots - bc.abc\ldots}{BC-bc}\right).$$

439. Si può ottenere la misura della solidità di un qualunque solido poliedro dividendolo in piramidi. Questa divisione però può eseguirsi in più di una guisa: una delle più semplici consiste nel far passare i piani di divisione pel vertice di uno stesso angolo poliedro, con che si avranno tante piramidi parziali, quante facce sono nel solido, eccetto quelle che contengono l'angolo poliedro dal quale partono i piani di divisione.

440. Due solidi poliedri, i quali sono terminati da facce simili ciascuna a ciascuna, similmente disposte, ed ugualmente inclinate fra loro, si dicono *simili*.

Da siffatta definizione si deduce che se due piramidi sono simili, la minore potrà essere situata nella maggiore in modo che abbiano l' angolo poliedro V comune. Allora le basi $ABC\ldots$, $abc\ldots$ saranno parallele; poichè per essere simili le facce omologhe, sarà l'angolo $Vab = VAB$, l' angolo $Vbc = VBC$, e perciò (402) il piano $abc\ldots$ parallelo al piano $ABC\ldots$ Ciò posto, sia VO la perpendicolare abbassata dal vertice V sul piano $ABC\ldots$, e sia o il punto ove questa perpendicolare incontra il piano $abc\ldots$; si avrà (432)

$$VO:Vo = VA:Va = AB:ab,$$

e quindi

$$\frac{1}{3}VO:\frac{1}{3}Vo = AB:ab.$$

Dippiù, essendo le basi $ABC\ldots$, $abc\ldots$ figure simili, si otterrà (362)

$$ABC\ldots : abc = (AB)^2:(ab)^2.$$

Per la qual cosa sarà

$$\frac{1}{3}VO.ABC\ldots : \frac{1}{3}Vo.abc\ldots = (AB)^3:(ab)^3 = (VA)^3:(Va)^3 = \text{ec.}$$

Ma il prodotto $\frac{1}{3}VO.ABC\ldots$ è la misura della piramide $VABC\ldots$, il

prodotto $\frac{1}{3}$ *Vo.abc* . . . è la misura della piramide *Vabc* . . . Adunque *le piramidi simili stanno fra loro come i cubi dei lati omologhi.*

Ora si comprende agevolmente che due qualunque solidi poliedri simili *P*, *p* si possono decomporre in un medesimo numero di piramidi rispettivamente simili, e similmente disposte: laonde, chiamando S, S', S'', . . . le piramidi in cui si decompone il primo solido, s, s', s'', . . . le piramidi in cui si divide il secondo, ed A, A', A'', . . . a, a', a'', ... i lati omologhi di queste piramidi, si avrà

$$\frac{S}{s}=\frac{A^3}{a^3},\ \frac{S'}{s'}=\frac{A'^3}{a'^3},\ \frac{S''}{s''}=\frac{A''^3}{a''^3},\ldots$$

Ma in virtù della somiglianza dei due solidi P, p, $\frac{A}{a}=\frac{A'}{a'}=\frac{A''}{a''}=\ldots$;
dunque $\frac{S}{s}=\frac{S'}{s'}=\frac{S''}{s''}=\ldots=\frac{A^3}{a^3}$; donde

$$\frac{S+S'+S''+\ldots}{s+s'+s''+\ldots}=\frac{P}{p}=\frac{A^3}{a^3}.$$

Adunque *due qualunque solidi poliedri simili stanno fra loro come i cubi dei lati omologhi.*

CAPO XX.

DI ALCUNE NOZIONI SULLA SFERA, DELLA NATURA E DELLE PRINCIPALI PROPRIETÀ DEI TRIANGOLI SFERICI.

441. La *sfera* è un solido terminato da una superficie che ha tutti i suoi punti ugualmente distanti da un punto che dicesi *centro* della sfera.

Se il semicerchio *ACB* (*fig.* 170.ª) si faccia girare intorno al diametro *AB*, ei genererà una sfera; imperocchè la superficie che con tal movimento vien descritta dalla semicirconferenza *ACB*, ha evidentemente tutti i suoi punti ugualmente distanti dal centro *O*.

Il *raggio* della sfera è la linea retta che dal centro si conduce ad un punto qualunque della sua superficie; il *diametro* o *asse* della sfera è la linea retta che passa pel centro, e termina da ambe le parti alla superficie.

In una stessa sfera tutti i raggi sono uguali, tutti i diametri sono pure uguali e doppii del raggio.

442. *Allorchè la sfera vien secata da un piano, la sezione è un cerchio.*

Questa proposizione è evidente ove il piano secante si supponga passare pel

centro O della sfera. Sia dunque $cmm'd$ una sezione fatta nella sfera da un piano che non passa pel suo centro O. Da questo centro si abbassino la perpendicolare Oo sul piano $cmm'd$ della sezione, e varie oblique Oc, Om, Om', ... a diversi punti della curva $cmm'd$ che termina la sezione. I triangoli Oco, Omo, $Om'o$, ... essendo rettangoli in o, ed avendo le ipotenuse Oc, Om, Om', ... uguali, perchè raggi della medesima sfera, ed il lato Oo comune, avranno eziandio i lati oc, om, om', ... tutti uguali (281. 5.°), e perciò la sezione $cmm'd$ sarà un cerchio che ha il suo centro in o.

La sezione che passa pel centro dicesi *cerchio massimo*, quella poi che non passa pel centro dicesi *cerchio minore*.

Dal detto si deduce 1.° che tutti i cerchi massimi sono uguali fra loro.

2.° Che due cerchi massimi si secano in due parti uguali, poichè la loro comune intersezione è il diametro.

3.° Che ogni cerchio massimo divide la sfera e la sua superficie in due parti uguali.

4.° Che il centro di un cerchio minore, e quello della sfera, sono sopra una medesima retta perpendicolare al piano del cerchio minore.

5.° Che i cerchi minori sono tanto più piccoli, quanto sono più lontani dal centro della sfera, poichè quanto più è grande la distanza Oo, tanto più è piccola la corda ed diametro del cerchio minore $cmm'd$.

6.° Che per due punti dati sulla superficie di una sfera si può sempre far passare un arco di cerchio massimo, poichè i due punti dati ed il centro della sfera determinano la posizione di un piano.

443. Un piano è *tangente* alla sfera, quando non ha che un sol punto comune con la sua superficie. Ciò posto, si dimostra che *ogni piano condotto per la estremità di un raggio perpendicolarmente allo stesso raggio, è tangente alla sfera*. Sia infatti CAD (*fig.* 171.ª) un piano perpendicolare alla estremità del raggio OA; dal centro O al punto G preso ad arbitrio nel piano CAD conducendo la retta OG e congiungendo AG, il triangolo OAG sarà rettangolo in A (392), e quindi $OG>OA$. Adunque il punto G è fuori della sfera. L'istesso dicasi di un qualunque altro punto del piano CAD. Questo piano adunque non ha che il solo punto A comune con la superficie della sfera, e perciò esso è tangente alla sfera.

444. *Polo* di un cerchio segnato sulla sfera, dicesi quel punto della superficie sferica, il quale dista ugualmente da tutti i punti della circonferenza di questo cerchio.

Ora si dimostra che *le due estremità del diametro che si conduce perpendicolarmente al piano di un cerchio massimo, sono poli di questo cerchio massimo, e di tutti i cerchi minori ad esso paralleli.*

Imperocchè se il diametro AB (*fig.* 170.ª) si suppone perpendicolare al piano del cerchio massimo $CMM'D$, esso sarà pure perpendicolare a tutte le rette OC, OM, OM', ec. che pel centro O della sfera si conducono in questo piano (392), e quindi tutti gli archi AC, AM, AM', ec. saranno quarte parti della circonferenza: lo stesso è degli archi BC, BM, BM', ec. Adunque i punti A, e B distano ugualmente da tutti i punti della circonferenza del cerchio massimo $CMM'D$, e perciò sono poli di questo cerchio.

Dippiù il diametro AB perpendicolare al piano $CMM'D$, è perpendicolare eziandio al piano $cmm'd$ parallelo a $CMM'D$ (401. 2.°), e perciò passa pel centro o del cerchio minore $cmm'd$ (442. 4.°); quindi si deduce che tutte le corde

Ac, *Am*, *Am'*, ec. sono fra loro uguali (396. 4.°). Ma nei cerchi uguali le corde uguali corrispondono ad archi uguali. Adunque tutti gli archi *Ac*, *Am*, *Am'*, ec. sono fra loro uguali. Adunque il punto *A* è polo del cerchio minore *cmm'd*, e per la ragione medesima il punto *B* è l'altro polo di questo stesso cerchio.

Quindi conseguita 1.° che ogni arco condotto da un punto qualunque della circonferenza di un cerchio massimo al suo polo, è uguale ad un *quadrante*, ossia alla quarta parte della circonferenza.

2.° Che se la distanza del punto *A* da ciascuno dei due punti *M*, *M'* della circonferenza del cerchio massimo *CMM'D*, è uguale ad un quadrante, sarà *A* polo di questo cerchio massimo. Infatti dal centro *O* della sfera conducendo *OM*, *OM'*, poichè gli angoli *AOM*, *AOM'* sono retti, il raggio *AO* sarà nel tempo stesso perpendicolare ad *OM* e *OM'*, e quindi sarà (396) perpendicolare al loro piano, che è lo stesso che quello del cerchio massimo *CMM'D*. Adunque la estremità *A* del raggio *AO* sarà polo di questo cerchio massimo.

445. Chiamiamo *triangolo sferico* quella parte della superficie della sfera, che è racchiusa fra tre archi di cerchi massimi. Questi archi, che si chiamano i *lati* del triangolo sferico, vengono sempre supposti minori della semicirconferenza, e gli angoli che i loro piani fanno tra loro sono gli angoli del triangolo. Dallo scambievole intersecarsi dei cerchi minori risultano ancora dei triangoli nella superficie della sfera; noi però sì in questa che nelle altre parti di questi elementi non intendiamo parlare che dei soli triangoli sferici, i quali vengono formati dallo scambievole intersecarsi dei cerchi massimi.

Un triangolo sferico si dice *rettangolo*, quando uno dei suoi angoli è retto; *isoscele* quando due suoi lati sono uguali; *equilatero* quando tutti i tre lati sono uguali; ec.

446. *In un triangolo sferico, un lato qualunque è sempre minore della somma degli altri due lati.*

Sia *O* (*fig.* 172.ª) il centro della sfera; da questo centro ai tre vertici *A*, *B*, *C* del triangolo sferico *ABC* conducendo i raggi *OA*, *OB*, *OC*, i tre angoli piani *AOB*, *BOC*, *COA* saranno rispettivamente misurati dai tre lati *AB*, *BC*, *CA* del triangolo. Ora questi tre angoli formano in *O* l'angolo triedro *OABC*, e in ogni angolo triedro ciascuno dei tre angoli piani che lo compongono, è minore della somma degli altri due (413). Adunque ec.

447. *La somma dei tre lati di un triangolo sferico qualunque è sempre minore della circonferenza di un cerchio massimo.*

Sia il triangolo sferico *ABC* (*fig.* 173.ª), i cui lati *AB*, *AC*, si prolunghino fino ad incontrarsi di nuovo in *D*. Essendo (446) $BC<BD+CD$, e $BD+CD=360°-AB-AC$, sarà $BC<360°-AB-AC$, donde $AB+$ $+AC+BC<360°$, la somma cioè dei tre lati del triangolo sferico *ABC* minore della circonferenza di un cerchio massimo.

Questa proposizione può dimostrarsi ancora con la figura del numero precedente. Infatti i tre archi, ossia lati *AB*, *AC*, *BC*, misurano i tre angoli piani *AOB*, *AOC*, *BOC*: ma (414) la somma di questi angoli è minore di 360°. Adunque la somma dei tre lati *AB*, *AC*, *BC* sarà pure minore di 360°.

448. Un angolo qualunque *EAF* (*fig.* 171.ª) formato da due archi di cerchi massimi *AE*, *AF*, è uguale all'angolo *CAD* formato dalle rette *AC*, *AD* situate nei piani stessi di quegli archi, dirette pel verso medesimo, e tangenti ad essi nel punto *A*. Imperocchè la *AC* situata nel piano dell'arco *AE*, ed insieme tangente a questo arco, è perpendicolare al raggio *OA*; similmente

la AD situata nel piano dell' arco AF, ed insieme tangente a questo arco, è perpendicolare al medesimo raggio OA. Adunque l'angolo CAD è uguale all'angolo dei piani OAE, OAF (405) che è l'angolo degli archi AE, AF (445).

Ma l' angolo EAF è altresì misurato dall' arco di cerchio massimo EF descritto dal punto A come polo, fra i lati AE, AF prolungati se fia bisogno. Infatti se A è polo dell' arco di cerchio massimo EF, sarà $AE=AF=90°$, e quindi i raggi OE, OF saranno perpendicolari ad OA, e perciò l' angolo EOF sarà uguale all'angolo dei piani OAE, OAF, ossia all' angolo EAF degli archi AE, AF. Ma l' angolo EOF ha per misura l' arco EF. Adunque anche l' angolo EAF avrà per misura l' arco EF.

Quindi si deduce la seguente proposizione. *Gli angoli dei triangoli sferici possono paragonarsi fra loro per mezzo degli archi di cerchi massimi descritti dai loro vertici come poli, e compresi fra i loro lati.*

449. Proposto il triangolo sferico ABC (*fig.* 174.ª), se dai vertici A, B, C come poli, si descrivano gli archi di cerchi massimi $B'C'$, $A'C'$, $A'B'$, questi formeranno il triangolo sferico $A'B'C'$, i cui vertici A', B', C' saranno poli degli archi BC, AC, AB. Infatti se A è polo dell' arco $B'C'$, la sua distanza dal punto B' sarà uguale ad un quadrante, e se C è polo dell' arco $A'B'$, la distanza del punto C dal punto B' sarà pure uguale ad un quadrante. Adunque il punto B' è distante da ciascuno dei punti A, C per un quadrante; dunque esso è il polo dell' arco AC (444. 2.°). In simil guisa si dimostrerà che A' è polo dell' arco BC, e che C' è polo dell' arco AB.

Ciò posto, prolungando come nella figura i lati AB, AC, BC del triangolo sferico proposto, si avrà

$$B'E'=C'D'=90°\,,\quad BE=CD=90°,$$

donde si dedurrà

$$B'E'+C'D'=B'C'+D'E'=180°\,,\quad BE+CD=BC+DE=180°.$$

Ma l' arco $D'E'$ misura l' angolo BAC, e l' arco DE misura l' angolo $B'A'C'$ (448). Adunque sarà

$$B'C'=180°-BAC\,,\quad B'A'C'=180°-BC.$$

Queste formole c'indicano che ciascun lato o angolo del triangolo $A'B'C'$ è uguale alla mezza circonferenza meno l' angolo o lato opposto nel triangolo ABC. Per la qual cosa dinotando con a, b, c i lati opposti agli angoli A, B, C del triangolo ABC, e con a', b', c' i lati opposti agli angoli A', B', C' del triangolo $A'B'C'$, otterremo

$$\left.\begin{array}{l} a'=180°-A\,,\ b'=180°-B\,,\ c'=180°-C\,; \\ A'=180°-a\,,\ B'=180°-b\,,\ C'=180°-c. \end{array}\right\}(q).$$

Si danno ai triangoli ABC, $A'B'C'$ differenti denominazioni: noi però col celebre Legendre li chiameremo *polari*.

450. Le tre prime equazioni (q) danno

$$A+B+C=540°-(a'+b'+c')\,;\ \text{e quindi}\ A+B+C<540°.$$

Abbiamo inoltre (447)

$$a'+b'+c'<360^\circ\text{; per conseguenza sarà } A+B+C>180^\circ.$$

Adunque *i tre angoli di un triangolo sferico qualunque presi insieme, sono minori di sei angoli retti, e maggiori di due.*

Da siffatta proposizione si deduce 1.° che la somma degli angoli di un triangolo sferico non è costante come quella dei triangoli rettilinei; essa infatti varia da due angoli retti fino a sei, senza mai poter essere uguale all'uno o all'altro limite. Quindi è che due angoli dati non possono farci conoscere il terzo.

2.° Che un triangolo sferico può avere due o tre angoli retti, e anche due o tre angoli ottusi.

451. Sia dato il triangolo sferico ABC (*fig.* 175.ª). Dal vertice A come polo, e con l'intervallo AC, si descriva l'arco di cerchio minore DEC: parimenti dal vertice B come polo, e con l'intervallo BC, si descriva l'arco di cerchio minore DFC: quindi per il punto D, nel quale gli archi DEC, DFC s'incontrano, si conducano gli archi di cerchi massimi AD, BD; dico che il triangolo sferico ABD in tal guisa costrutto ha tutte le sue parti uguali a quelle del triangolo dato ABC.

Che il triangolo ABD abbia i suoi lati uguali rispettivamente a quelli del triangolo ABC, è chiaro, poichè per costruzione il lato $AD=AC$, il lato $BD=BC$, ed il lato AB è comune. Adunque rimane solo a dimostrare che in quei triangoli gli angoli opposti ai lati uguali sono uguali. Sia pertanto il punto O il centro della sfera; in questo punto si possono evidentemente concepire due angoli triedri, uno formato dagli angoli piani AOB, AOC, BOC, e l'altro dagli angoli piani AOB, AOD, BOD. E poichè i lati del triangolo ABC sono uguali ai lati del triangolo ABD, gli angoli piani che formano il primo angolo triedro saranno uguali agli angoli piani che formano il secondo angolo triedro. Ma (415) quando i tre angoli piani, i quali formano un angolo triedro sono uguali rispettivamente ai tre angoli piani i quali formano un secondo angolo triedro, i piani degli angoli uguali sono ugualmente inclinati l'uno sull'altro. Adunque (445) ancora gli angoli del triangolo sferico ABC sono uguali agli angoli del triangolo sferico ABD, cioè l'angolo $BAC=BAD$, $ABC=ABD$, $ACB=ADB$.

Ma quantunque questi triangoli sieno uguali in tutte le loro parti, riesce nondimeno impossibile il poterli soprapporre l'uno sull'altro in modo che coincidano esattamente, eccettuandone il solo caso, in cui essi fossero isosceli. Per siffatta ragione la uguaglianza della quale è parola, vien chiamata *uguaglianza per simmetria*, ed i triangoli ABC, ABD sono detti *simmetrici.*

452. *Due triangoli sferici situati sopra la medesima sfera o sopra sfere uguali, sono uguali in tutte le loro parti, quando hanno un angolo uguale compreso fra lati rispettivamente uguali.*

Se nei due triangoli sferici ABC, $A'B'C'$ (*fig.* 176.ª) si ha il lato $AB=A'B'$, il lato $AC=A'C'$, e l'angolo $BAC=B'A'C'$, potrà uno di essi, per esempio $A'B'C'$, soprapporsi all'altro ABC, o al simmetrico ABD di questo, in quella medesima guisa che si soprappongono i triangoli rettilinei, i quali abbiano un angolo uguale compreso fra lati rispettivamente uguali. Adunque le tre altre parti del triangolo sferico $A'B'C'$ sono uguali alle tre altre parti del trian-

golo sferico ABC, cioè il lato $BC=B'C'$, l'angolo $ABC=A'B'C'$, e l'angolo $ACB=A'C'B'$.

453. *Due triangoli sferici situati sopra la medesima sfera o sopra sfere uguali, sono uguali in tutte le loro parti, quando hanno un lato uguale adiacente a due angoli rispettivamente uguali.*

Imperocchè uno di questi triangoli si può con la sopprapposizione far coincidere esattamente con l'altro, o col simmetrico di questo, come fu fatto sopra (271) per i triangoli rettilinei.

454. *Due triangoli sferici situati sopra la medesima sfera o sopra sfere uguali, sono uguali in tutte le loro parti, quando hanno i tre lati rispettivamente uguali.*

La verità di questa proposizione si rende chiara dal numero 451, nel quale si è veduto che con tre lati dati AB, AC, BC (*fig.* 175.ª) non possono costruirsi che due triangoli ABC, ABD differenti in quanto alla disposizione delle parti, ma uguali in quanto alla grandezza di queste medesime parti. Quindi due triangoli sferici i quali hanno i lati rispettivamente uguali o sono assolutamente uguali, ovvero uguali per simmetria: e in ambedue i casi sono uguali gli angoli opposti ai lati uguali.

455. *Due triangoli sferici situati sopra la medesima sfera o sopra sfere uguali, sono uguali in tutte le loro parti quando hanno i tre angoli rispettivamente uguali.*

Sieno T, T' i due triangoli dati, e P, P' i loro triangoli polari. Poichè per supposizione i triangoli T, T' hanno gli angoli rispettivamente uguali, i lati dei triangoli polari P, P' saranno altresì uguali rispettivamente (449.(q)). Ma se i triangoli P, P' hanno i lati rispettivamente uguali, essi per la proposizione precedente sono equiangoli fra loro; ed essendo equiangoli fra loro i triangoli P, P', per le citate formole (q) i loro triangoli polari T, T' sono fra loro equilateri. Adunque ec. (*).

456. *In un triangolo sferico isoscele gli angoli opposti ai lati uguali sono uguali; e vicendevolmente se due angoli di un triangolo sferico sono uguali, i lati opposti a questi angoli sono eziandio uguali, ed il triangolo per conseguenza è isoscele.*

Nel triangolo sferico ABC (*fig.* 177.ª) si abbia il lato $AB=AC$; congiungendo il vertice A col punto D medio della base BC per mezzo dell'arco di cerchio massimo AD, si otterranno i due triangoli sferici ABD, ACD equilateri fra loro. Ora due triangoli sferici, i quali hanno i lati rispettivamente uguali, hanno altresì uguali gli angoli opposti ai lati uguali (454). Adunque l'angolo B è uguale all'angolo C.

(*) Questa proposizione non ha luogo nei triangoli rettilinei, nei quali la uguaglianza degli angoli importa solo la proporzionalità rispettiva dei lati. Ma è agevole il render conto della differenza che s'incontra per tal riguardo tra i triangoli rettilinei ed i triangoli sferici. Imperocchè in questa proposizione, e nelle altre ancora dimostrate nei numeri 452, 453, 454, come pure in quella del numero 458, nelle quali tutte si tratta del paragone dei triangoli sferici, si suppone espressamente che siffatti triangoli sieno descritti sopra la medesima sfera o sopra sfere uguali. Ora gli archi simili essendo proporzionali ai raggi, quando questi sono uguali anche quelli saranno uguali; donde risulta che i triangoli sferici descritti sopra sfere uguali non possono esser simili senza essere uguali. Non deve adunque recar maraviglia che nei triangoli sferici la uguaglianza degli angoli importi anche quella dei lati.

Sarebbe altrimenti ove i triangoli fossero descritti sopra sfere disuguali: in questo caso, se gli angoli fossero uguali rispettivamente, i triangoli sarebbero simili, ed i lati omologhi starebbero fra loro come i raggi delle sfere.

La proposizione inversa può dimostrarsi nel modo seguente. Se il triangolo ABC (*fig. 174.ª*) ha l'angolo $B=C$, il suo triangolo polare $A'B'C'$ avrà (449) il lato $A'B'=A'C'$, e per ciò che si è ora dimostrato sarà l'angolo $B'=C'$. Ora se il triangolo $A'B'C'$ ha l'angolo $B'=C'$, nel suo polare ABC sarà il lato $AB=AC$. Adunque ec.

Dal detto deducesi che un triangolo sferico equilatero è altresì equiangolo; e vicendevolmente, che un triangolo sferico equiangolo è eziandio equilatero.

457. ***In un triangolo sferico il lato maggiore si oppone all' angolo maggiore; e reciprocamente, l'angolo maggiore è opposto al lato maggiore.***

Nel triangolo sferico ABC (*fig. 178.ª*) suppongasi l'angolo $BAC>ABC$. Dal vertice A conducendo l' arco di cerchio massimo AD, il quale faccia col lato AB l'angolo $BAD=ABC$, si avrà (456) $AD=BD$. Ma $AD+DC>AC$ (446). Sarà dunque $BD+DC$ ossia $BC>AC$.

Reciprocamente se il lato $BC>AC$, sarà l'angolo $BAC>ABC$. Infatti non può essere l'angolo $BAC=ABC$, altrimenti sarebbe contro la supposizione il lato $BC=AC$ (456); nè può essere l' angolo $BAC<ABC$, perchè in questo caso, come si è dimostrato poco innanzi, dovrebbe essere il lato $BC<AC$, lo che è pure contrario alla supposizione. Resta dunque che sia $BAC>ABC$.

458. ***Se due lati di un triangolo sferico sono uguali rispettivamente a due lati di un altro triangolo sferico descritto sopra una sfera uguale, e l' angolo compreso dai primi due lati è maggiore dell' angolo compreso dai secondi, sarà il terzo lato del primo triangolo maggiore del terzo lato del secondo triangolo; e vicendevolmente.***

La dimostrazione di questa proposizione è del tutto simile a quella della proposizione del numero 275.

459. Si chiama *fuso sferico* quella parte di superficie sferica, che è compresa fra due semicerchi massimi, i quali terminano ad un diametro comune: la parte poi del solido della sfera che è compresa fra i medesimi semicerchi massimi, e che ha il fuso per base, dicesi *cuneo* o *unghia sferica*.

Ciò posto, si dimostra assai facilmente che un fuso sferico come $ACBMA$ (*fig. 170.ª*) sta a tutta la superficie della sfera, come l'angolo CAM del fuso sta a quattro angoli retti, o che è lo stesso (444. 448), come l' arco CM del cerchio massimo $CMM'D$ perpendicolare al diametro AB, sta alla sua circonferenza.

Si supponga primieramente che l' arco CM stia alla circonferenza $CMM'D$ come il numero intero m sta al numero intero n; adunque dividendo la circonferenza $CMM'D$ in n parti uguali, di queste l' arco CM ne conterrà un numero uguale ad m. Congiungendo pertanto il polo A con i punti di divisione per mezzo di altrettanti quadranti, si avranno nella superficie della semisfera $ACMM'D$ disegnati n triangoli sferici tutti fra loro uguali (454); per la qual cosa la intera superficie della sfera conterrà $2n$ di questi triangoli, ed il fuso sferico $ACBMA$ ne conterrà $2m$. Adunque starà il fuso $ACBMA$ alla intera superficie della sfera come $2m$ sta a $2n$, o come m sta ad n, cioè come l' arco CM sta alla circonferenza $CMM'D$.

Se il rapporto fra l' arco CM e la circonferenza $CMM'D$ non è commensurabile, si dimostrerà pure col ragionamento medesimo, di cui si sono già veduti parecchi esempii, che il fuso $ACBMA$ sta alla superficie della sfera come l'arco CM sta alla circonferenza $CMM'D$.

460. Chiamasi *zona sferica* quella parte di superficie della sfera, la quale è compresa fra due piani paralleli. Le sezioni di questi piani con la sfera sono le due *basi* superiore ed inferiore della zona. Se uno dei piani paralleli è tangente alla superficie della sfera, la zona non ha che una sola base, e prende il nome di *calotta sferica*.

Per *segmento sferico* s' intende la porzione del solido della sfera compreso fra due piani paralleli, che ne determinano le *basi*. Allorchè uno di questi piani è tangente alla sfera, il segmento sferico non ha che una sola base.

L' *altezza* di una zona sferica, o di un segmento sferico, è la perpendicolare comune ai due piani paralleli che determinano le basi della zona o del segmento.

Da ultimo, mentre il semicerchio ACB girando intorno al diametro AB descrive la sfera, ogni settore circolare come AOc descrive un solido che vien detto *settore sferico*.

CAPO XXI.

DEL CONO, DELLA MISURA DELLA SUA SOLIDITÀ E DELLA SUA SUPERFICIE CURVA.

461. Il solido terminato dall' area circolare BED (*fig.* 179.^{a}), e dalla superficie curva generata dalla retta AB fatta passare sempre per un punto fisso A situato fuori del piano BED, e scorrere con la estremità B sulla circonferenza BED, si chiama *cono*. La retta AB vien detta *lato del cono*; il cerchio BED, *base del cono*; il punto A, *vertice del cono*; la retta AC che passa pel vertice A, e per il centro C della base, *asse del cono*; finalmente la perpendicolare AH abbassata dal vertice A sopra la base, *altezza del cono*.

Se l' altezza si confonde con l' asse, il cono si dice essere *retto*, altrimenti si dirà essere *obliquo*. Il cono retto può dunque concepirsi generato da un triangolo rettangolo che giri intorno ad un suo cateto immobile.

462. *Se si sechi un cono qualunque con un piano parallelo alla base, la sezione è un cerchio, il cui centro è nel punto d' incontro dell' asse con la sezione medesima.*

Rappresenti bed una sezione fatta nel cono $ABED$ con un piano parallelo alla sua base BED, sia c il punto d' incontro dell' asse AC con la sezione bed, e le rette cb, ce, cd, . . . esprimano le intersezioni comuni alla medesima bed ed ai piani ACB, ACE, ACD, . . . ; saranno (401) le cb, ce, cd, . . . rispettivamente parallele alle CB, CE, CD, . . . , e quindi (348, 1.°)

$$AC:Ac=CB:cb=CE:ce=CD:cd=\text{ec.}$$

Ma $CB=CE=CD=$ec. Adunque $cb=ce=cd=$ec.

E qui cade opportuno il notare che dovendo paragonare fra loro le circonferenze, e le aree dei cerchi BED, bed, il rapporto di quelle sarà dato da $\frac{CE}{ce}=\frac{AC}{Ac}$, ed il rapporto di queste da $\frac{(CE)^2}{(ce)^2}=\frac{(AC)^2}{(Ac)^2}$ (391).

463. Se s'iscriva e circoscriva alla base *BED* del cono *ABED* un poligono regolare, e sia n il numero dei lati sì dell'iscritto p, che del circoscritto p', e se inoltre si conducano le rette dai vertici dei singoli angoli dell'uno e dell'altro poligono al vertice *A* del cono, si otterranno due piramidi P, P' iscritta l'una e circoscritta l'altra al cono, e sarà (436. 3.°)

$$\frac{P'}{P}=\frac{p'}{p}.$$

Ora facendo crescere indefinitamente il numero n, il secondo membro di questa equazione si accosta sempre più alla unità (388. 389); adunque eziandio il primo membro, crescendo n, si accosterà ad agguagliare la unità, sempre cioè più piccola si renderà la differenza che passa fra le piramidi P, P', ed ambedue queste piramidi si accosteranno sempre più alla uguaglianza col cono fra esse compreso.

Ciò premesso, se facciamo $CB=r$, $AH=a$, e chiamiamo Q il cono *ABED*, una delle due formole (436. 2.°)

$$P=\frac{1}{3}ap,\ P'=\frac{1}{3}ap',$$

darà nel limite (391)

$$Q=\frac{1}{3}a\pi r^2,$$

la solidità cioè di un cono qualunque è uguale al prodotto della sua base per la terza parte della sua altezza.

Da questa proposizione conseguita 1.° che i coni i quali hanno uguali le basi, sono fra loro come le rispettive altezze.

2.° Che i coni i quali hanno uguali le altezze sono fra loro come le basi.

3.° Che due coni equivalenti, ossia uguali in solidità, hanno le basi in ragione reciproca delle altezze.

4.° Che due coni i quali hanno le basi in ragione reciproca delle altezze, sono equivalenti.

5.° Che le solidità di due coni simili stanno fra loro come i cubi dei diametri delle rispettive basi. E qui si noti che due coni si dicono *simili*, quando hanno gli assi similmente inclinati alle loro basi e proporzionali ai diametri di queste stesse basi.

464. La solidità di un cono tronco *Bd* a basi parallele, chiamando r il raggio della base inferiore *BED*, r' il raggio della superiore *bed*, ed a' l'altezza *hH*, ha per misura

$$\frac{1}{3}a'\pi(r^2+rr'+r'^2).$$

Pongasi $Ah=z$; poichè (401. 348. 1.°) $\frac{z}{z+a'}=\frac{Ac}{AC}=\frac{r'}{r}$, si avrà $z=\frac{a'r'}{r-r'}$, donde $z+a'=\frac{a'r'}{r-r'}+a'=\frac{a'r}{r-r'}$, e quindi le solidità dei due coni

$ABED$, $Abed$, saranno (463) rispettivamente uguali a $\frac{1}{3}.\frac{\pi a'r^3}{r-r'}$, $\frac{1}{3}.\frac{\pi a'r'^3}{r-r'}$.
Adunque la solidità del tronco $Bd = ABED - Abed$, sarà

$$\frac{1}{3}a'\pi\left(\frac{r^3-r'^3}{r-r'}\right)=\frac{1}{3}a'\pi(r^2+rr'+r'^2).$$

465. Il cono $ABED$ (*fig. 180.ª*) sia retto; esprimendo con S, S' le superficie convesse delle piramidi P, P' (463), con s, s' i perimetri dei poligoni p, p', con v una qualunque delle perpendicolari che dal vertice A si abbassano sopra i lati del poligono p, e con v' il lato del cono, otterremo

$$\left.S=\frac{1}{2}sv,\ S'=\frac{1}{2}s'v'\right\}\ (k).$$

Infatti in una piramide, se i lati della base sono fra loro uguali, se uguali sono ancora fra loro le rette che uniscono il vertice della piramide con i vertici degli angoli della base, saranno (281. 6.° : 343) pure uguali fra loro le perpendicolari che dal vertice della piramide si abbassano sopra i singoli lati della base, e per conseguenza la superficie convessa della piramide sarà in tal caso uguale alla metà del prodotto del perimetro della base per una qualunque delle succennate perpendicolari (388). Ma ciascuna delle piramidi P, P', oltre l'avere uguali fra loro i lati della base, nella ipotesi che il cono è retto ha eziandio uguali fra loro le rette che congiungono il suo vertice con i vertici degli angoli di questa base (380. 396. 4.°). Adunque sarà la superficie convessa S della piramide P uguale alla metà del prodotto del perimetro s della sua base p per la perpendicolare v, e la superficie convessa S' della piramide P' uguale alla metà del prodotto del perimetro s' della sua base p' per il lato v' del cono, poichè con un poco di attenzione si farà chiaro, una qualunque delle perpendicolari che dal vertice di P' si abbassano sopra i singoli lati della sua base, agguagliare il lato del cono.

Ciò posto, dividiamo la seconda delle equazioni (k) per la prima; avremo

$$\frac{S'}{S}=\frac{s'}{s}.\frac{v'}{v}.$$

Ma facendo crescere indefinitamente il numero n, ciascuno dei rapporti $\frac{s'}{s}$, $\frac{v'}{v}$ si accosta (386. 388) alla unità; adunque alla unità si accosterà pure il rapporto $\frac{S'}{S}$. Laonde la differenza fra le superficie S, S', facendo crescere all'infinito il numero n, si renderà sempre più piccola, accostandosi ambedue queste superficie alla superficie curva del cono. Dinotando quindi questa ultima con Σ, e facendo anche qui il raggio $CB=r$, una delle due equazioni (k) ci darà nel limite (388. 391)

$$\Sigma=\frac{1}{2}2\pi rv'=\pi rv',$$

Siffatta espressione c'indica che *la superficie curva del cono retto è uguale*

alla metà del prodotto della circonferenza della sua base per il lato del cono.

Ci limitiamo in questi elementi di Geometria a dare la espressione della misura della superficie curva del solo cono retto, poichè la misura della superficie curva di un cono obliquo qualunque forma l'oggetto di un problema assai difficile da non potersi risolvere che con l'aiuto del calcolo sublime.

466. *La superficie curva di un tronco di cono retto a basi parallele, è uguale al prodotto del suo lato per la semisomma delle circonferenze delle due basi.*

Sia Bd un tronco di cono retto a basi parallele, ritenendo le superiori denominazioni r, r' per i raggi delle due basi inferiore e superiore, e v' per il lato dell'intero cono $ABED$, si chiami u il lato Bb del tronco; sarà $Ab=v'-u$.

Posto ciò, la superficie curva del cono intero $ABED$ è (465) $\frac{1}{2}2\pi rv'$: la superficie curva del cono tolto $Abed$ è $\frac{1}{2}2\pi r'(v'-u)$. Adunque la superficie curva del cono tronco Bd sarà uguale a $\frac{1}{2}2\pi rv'-\frac{1}{2}2\pi r'(v'-u)=\frac{1}{2}2\pi ru+\frac{1}{2}2\pi r(v'-u)-\frac{1}{2}2\pi r'(v'-u)=\frac{1}{2}2\pi ru+\frac{1}{2}(2\pi r-2\pi r')(v'-u)$.
Ora i triangoli simili ABC, Abc danno la proporzione

$$AB:Ab=BC:bc\text{, ossia } v':v'-u=r:r'=2\pi r:2\pi r',$$

donde

$$u:v'-u=2\pi r-2\pi r':2\pi r'\text{, e } 2\pi r'u=(2\pi r-2\pi r')(v'-u).$$

Adunque la superficie cercata sarà

$$\frac{1}{2}2\pi ru+\frac{1}{2}2\pi r'u=\frac{1}{2}(2\pi r+2\pi r')u.$$

CAPO XXII.

DEL CILINDRO, DELLA MISURA DELLA SUA SOLIDITÀ E DELLA SUA SUPERFICIE CURVA.

467. Il solido terminato dalla superficie curva generata dalla retta AA' (*fig. 181.ª*) fatta scorrere parallelamente a se stessa con la estremità A sopra la circonferenza del cerchio ABD, si chiama *cilindro*. Il cerchio ABD si dice *base del cilindro*; la retta AA', *lato del cilindro*; e la retta CC' condotta pel centro della base, ed uguale e parallela al lato del cilindro, *asse del cilindro*.

Se l'asse CC' è perpendicolare alla base ABD, il cilindro si dice *retto*, altrimenti si dirà *obliquo*. Ciò posto, è chiaro potersi il cilindro retto concepire come generato da un rettangolo che giri intorno ad un suo lato immobile.

468. Le rette AA' e CC', come pure le rette BB' e CC', DD' e CC', ec. essendo uguali e parallele, saranno altresì uguali e parallele le rette AC e $A'C'$, BC e $B'C'$, DC e $D'C'$, ec. Adunque la faccia $A'B'D'$, dalla quale superiormente è terminato il cilindro, è un cerchio che è uguale e parallelo alla base, e che ha il centro nel punto estremo C' dell' asse.

469. *Qualunque sezione fatta in un cilindro parallelamente alla base, è un cerchio uguale a questa base, il cui centro è il punto d' incontro dell' asse con la sezione medesima.*

Rappresenti $A''B''D''$ una sezione fatta nel cilindro con un piano parallelo alla sua base ABD, sia C'' il punto dove l'asse CC' incontra la sezione $A''B''D''$, e le rette $C''A''$, $C''B''$, $C''D''$, ec. dinotino le intersezioni comuni alla medesima $A''B''D''$ ed ai piani $ACC'A'$, $BCC'B'$, $DCC'D'$, ec.; le rette $C''A''$, $C''B''$, $C''D''$, ec. saranno (401) rispettivamente parallele alle altre CA, CB, CD, ec. D'altronde sono parallele le rette AA' e CC', BB' e CC', DD' e CC' ec. Adunque (292) $C''A''=CA$, $C''B''=CB$, $C''D''=CD$, ec. Quindi ec.

470. Si concepisca ora iscritto e circoscritto alla base ABD un poligono regolare, ed n esprima il numero dei lati sì dell' iscritto p che del circoscritto p'; s' intendano inoltre dai vertici dei singoli angoli dell' uno e dell' altro poligono innalzate le rette parallele all' asse, e quindi formati i due prismi P, P' iscritto l' uno e circoscritto l' altro al cilindro; sarà (431)

$$\frac{P'}{P}=\frac{p'}{p}.$$

Ora crescendo n indefinitamente, il rapporto $\frac{p'}{p}$ si accosta sempre più alla unità (388. 389); adunque a questo limite si accosterà eziandio il rapporto $\frac{P'}{P}$: crescendo cioè il numero n, sempre più piccola si renderà la differenza che ha luogo fra i prismi P, P', ed ambedue questi prismi sempre più si accosteranno alla uguaglianza col cilindro fra essi compreso. Per la qual cosa se facciamo $CA=r$, e notiamo con a la comune altezza del cilindro e dei prismi, e chiamiamo Q questo cilindro medesimo, una delle due formole (431)

$$P=ap\,,\quad P'=ap',$$

darà nel limite (391)

$$Q=\pi r^2 a.$$

Siffatta espressione c' insegna che *la solidità di un cilindro qualunque agguaglia il prodotto della sua base per la sua altezza.*

Adunque 1.° ogni cilindro è il triplo del cono che ha la medesima base e la medesima altezza (463).

2.° I cilindri i quali hanno uguali basi, stanno fra loro come le rispettive altezze; e vicendevolmente, i cilindri i quali hanno uguali altezze, stanno fra loro come le rispettive basi.

3.° Due cilindri equivalenti, hanno le basi in ragione reciproca delle altezze; e vicendevolmente, due cilindri i quali hanno le basi in ragione reciproca delle altezze, sono equivalenti.

4.° I cilindri simili stanno fra loro come i cubi dei diametri delle rispettive

basi. Si noti pertanto che i cilindri si dicono *simili* quantunque volte hanno gli assi, e inclinati ugualmente alle loro basi, e ai diametri di queste proporzionali.

471. Se il cilindro è retto, esprimendo con S, S' le superficie convesse dei prismi P, P' (470), con s, s' i perimetri dei poligoni p, p', e con v il lato del cilindro, si avranno evidentemente

$$S=sv\,,\quad S'=s'v\,,$$

donde $\frac{S'}{S}=\frac{s'}{s}$. Ma il rapporto $\frac{s'}{s}$, crescendo n all'infinito, si accosta (388) alla unità; al medesimo valore si accosterà dunque il rapporto $\frac{S'}{S}$. Laonde la superficie curva Σ del cilindro retto dovrà considerarsi come il limite a cui, crescendo n, sempre più si accostano le superficie S, S', e per conseguenza l'una o l'altra delle espressioni di queste superficie darà nel limite (388. 391)

$$\Sigma=2\pi rv.$$

Quindi rilevasi che *la superficie curva di un cilindro retto è uguale al prodotto della circonferenza della sua base per il lato del cilindro.*

Per ciò poi che si appartiene alla misura della superficie curva di un cilindro obliquo qualunque, notiamo soltanto non poter essa ottenersi coi soli mezzi della Geometria elementare.

CAPO XXIII.

DELLA MISURA DELLA SUPERFICIE E DELLA SOLIDITÀ DELLA SFERA.

472. Nel semicerchio AaB (*fig.* 182.ª) si conduca dal centro C alla corda aa' la perpendicolare Ch', la quale dividerà (299) la stessa aa' in h' per metà; quindi dai punti a, h', a' conducendo al diametro AB le perpendicolari ak, $h'k'$, $a'k''$, sopra questa ultima si abbassi la perpendicolare ag. Fatta questa costruzione, se si supponga che il semicerchio AaB giri intorno al diametro AB, la corda aa' genererà evidentemente la superficie curva ($=\varsigma$) di un tronco di cono retto a basi parallele, la quale avrà (466) per misura $2\pi\,\frac{1}{2}\,(ak+a'k'')aa'$.
Ora dai triangoli simili $ah'i$, $aa'g$ avendosi $ah':aa'=h'i:a'g$, siccome ah' è la metà di aa', anche $h'i$ sarà la metà di $a'g$; quindi agevolmente deducesi che così differisce $a'k''$ da $h'k'$, come $h'k'$ da ak, ossia $a'k''-h'k'=h'k'-ak$, donde $h'k'=\frac{1}{2}\,(ak+a'k'')$; sarà dunque $\varsigma=2\pi.h'k'.aa'$. Dippiù i triangoli simili (355) $aa'g$, $Ch'k'$ danno la seguente proporzione $h'k':Ch'=ag:aa'$, e perciò $h'k'.aa'=Ch'.ag=Ch'.kk''$; adunque

$$\varsigma=2\pi.Ch'.kk''.$$

Se la corda fosse Aa, girando il semicerchio, essa genererebbe la intera superficie curva $(=\varsigma')$ di un cono retto, la quale, conducendo dal centro alla medesima Aa la perpendicolare Ch, avrebbe (465) per misura il prodotto $\pi.ak.Aa=2\pi.ak.Ah$. Ma i triangoli Aak, ACh essendo simili, perchè oltre l'angolo comune A, hanno gli angoli in k ed h retti, danno la proporzione $Ah:Ch=Ak:ak$, donde $ak.Ah=Ch.Ak$. Adunque sarà

$$\varsigma'=2\pi.Ch.Ak.$$

Finalmente, se la corda fosse $a'a''$ parallela al diametro AB, essa girando genererebbe la superficie curva $(=\varsigma'')$ di un cilindro retto, della quale la misura, conducendo dal centro alla $a'a''$ la perpendicolare Ch'', verrebbe espressa (471) con

$$\varsigma''=2\pi.Ch''.k''k'''.$$

Se si avesse $Aa=aa'=a'a''$, sarebbe altresì (301. 1.°) $Ch=Ch'=Ch''$, e quindi

$$\varsigma+\varsigma'+\varsigma''=2\pi.Ch.Ak'''.$$

473. Dal detto finora si comprenderà senza veruna difficoltà che, iscrivendo nel semicerchio $FTT'C$ (*fig. 130.ª*) un semipoligono regolare qualunque $FABC$, e ad uno dei suoi lati p. e. AB conducendo dal centro O la perpendicolare OI, il semiperimetro del poligono genererà girando intorno al diametro FC una superficie S tale che sia

$$S=2\pi.OI.FC.$$

Posto ciò, se al medesimo semicerchio $FTT'C$ si circoscriva (381) un semipoligono regolare $F'A'B'C'$ simile al primo, poichè il cerchio che si descrive dal centro O col raggio OF' passa (380) per gli altri vertici A', B', C', la superficie S' generata dal semiperimetro del poligono col suo girare intorno a $F'C'$, verrà espressa da

$$S'=2\pi.OT.F'C'.$$

Quindi consegnita

$$\frac{S'}{S}=\frac{OT}{OI}\cdot\frac{F'C'}{FC}.$$

Ma facendo crescere all'infinito il numero dei lati dell'uno e dell'altro poligono, entrambi i rapporti $\frac{OT}{OI}$, $\frac{F'C'}{FC}$, si accostano sempre più alla unità (388); adunque alla unità eziandio si accosterà sempre più il rapporto $\frac{S'}{S}$. Pertanto con un ragionamento somigliante a quello già più volte ripetuto in pari circostanze, si dimostrerà essere la superficie sferica Σ il limite a cui indefinitamente si accostano le superficie S, S'. Per la qual cosa, ponendo il raggio $OT=r$, l'una o l'altra delle espressioni di siffatte superficie darà nel limite

$$\Sigma=2\pi.r.2r=4\pi r^2.$$

Adunque (391) *la superficie di una sfera qualunque è quadrupla di quella di un cerchio massimo della sfera medesima.*

Quindi 1.° Le superficie delle sfere stanno fra loro come i quadrati dei rispettivi raggi o dei rispettivi diametri.

2.° Se si concepisca un cilindro retto circoscritto alla sfera, il quale abbia per asse il diametro $AB=2r$ (*fig. 182.ª*) e per base un cerchio uguale ad un cerchio massimo della sfera medesima, sarà la superficie di questa equivalente alla superficie curva del cilindro; perocchè l'una e l'altra superficie (471) ha per misura $4\pi r^2$.

3.° La calotta sferica generata dalla rotazione dell'arco Aa intorno ad AB, è equivalente all'area del cerchio che ha per raggio la corda Aa. Infatti chiamando x la calotta, e facendo $Ak=y$, sarà

$$4\pi r^2 : x = 2r : y, \text{ donde } x = 2\pi r y = \pi . 2ry.$$

Ora si ha (357.4.°)

$$Ak : ak = ak : kB, \text{ ossia } y : ak = ak : 2r - y,$$

e perciò $(ak)^2 = 2ry - y^2$: dippiù nel triangolo rettangolo Aak è $(Aa)^2 = (Ak)^2 + (ak)^2 = 2ry$. Adunque sostituendo sarà $x = \pi (Aa)^2$. Ma $\pi\ (Aa)^2$ esprime (391) l'area del cerchio che ha per raggio Aa. Adunque ec.

4.° Un qualunque fuso sferico φ, facendo $=A$ l'angolo dei due semicerchi massimi che lo terminano, si ottiene (459) per mezzo della seguente proporzione

$$360^\circ : A = 4\pi r^2 : \varphi = \frac{A\pi r^2}{90^\circ}.$$

5.° Dati gli angoli A, B, C del triangolo sferico ABC (*fig. 183.ª*), si può sempre determinare la sua area τ. Prolunghisi il lato AB dall'una parte e dall'altra perchè si compia il cerchio $ABA'B'A$: si prolunghino altresì i lati AC, BC finchè di nuovo s'incontrino dalla opposta parte della sfera nel punto C'. Sarà $ACA' = 180^\circ = CA'C'$ ossia $AC + CA' = CA' + A'C'$, $BCB' = 180^\circ = CB'C'$ ossia $BC + CB' = CB' + B'C'$; donde $AC = A'C'$, e $BC = B'C'$: d'altronde gli angoli C, C' sono uguali (448). Adunque il triangolo sferico ABC è uguale in tutte le sue parti al triangolo sferico $A'B'C'$ (452), e quindi il fuso sferico $CB'C'A'C = ABC + CB'A'$. Pongasi ora $CB'A' = z$, $ACA'BA = \varphi$, $BAB'CB = \varphi'$; avremo (4.°)

$$\tau + z = \frac{C\pi r^2}{90^\circ},\ \varphi = \frac{A\pi r^2}{90^\circ},\ \varphi' = \frac{B\pi r^2}{90^\circ},$$

e conseguentemente

$$\tau + \varphi + \varphi' + z = \frac{\pi r^2}{90^\circ}(A + B + C).$$

Ma dalla semplice ispezione della figura si vede che $\varphi + \varphi' + z = 2\pi r^2 + \tau$; adunque sostituendo otterremo

$$2\pi r^2 + 2\tau = \frac{\pi r^2}{90^\circ}(A + B + C),$$

donde si dedurrà

$$\tau = \frac{\pi r^2}{180^\circ}(A+B+C) - \pi r^2 = \pi r^2 \left(\frac{A+B+C-180^\circ}{180^\circ}\right).$$

474. Supposte le cose come nel numero 472, l'area triangolare ACa (*fig. 182.*ª) girando intorno ad AC, genererà un solido ($=v$), il quale si risolve in due coni retti, dei quali uno è generato dalla rotazione del triangolo Aak, e l'altro dalla rotazione del triangolo aCk; sarà dunque $v = \frac{1}{3}\pi(ak)^2(Ak+kC) =$ $= \frac{1}{3}\pi(ak)^2 AC$ (463). Ma i triangoli simili Aak, ACh danno $AC:Ch = Aa:ak$, donde $AC.ak = Ch.Aa$. Adunque

$$v = \frac{1}{3}\pi.ak.Ch.Aa = \frac{1}{3}2\pi.ak.Ch.Ah = \frac{1}{3}s'.Ch;$$

cioè l' v ha per misura la terza parte del prodotto della superficie generata dalla rotazione del lato Aa per la perpendicolare Ch che dal centro C si conduce al medesimo lato Aa.

Ciò posto, se si prolunghino le rette $a'a$, CA fino ad incontrarsi in f, e si rifletta essere il solido ($=v'$) generato dalla rotazione del triangolo aCa' la differenza dei due solidi generati dalla rotazione dei due triangoli $a'Cf$, aCf, si vedrà chiaro che

$$v' = \frac{1}{3}s.Ch'.$$

Per ottenere poi la misura del solido ($=v''$) generato dalla rotazione del triangolo $a'Ca''$, basterà semplicemente notare che un tal solido è l' eccesso del cilindro generato dalla rotazione del rettangolo $a'k''k'''a''$ sopra i due coni retti generati dalla rotazione dei triangoli $a'Ck''$, $a''Ck'''$ uguali e simili; pertanto sarà (470.463)

$$v'' = \pi(a''k''')^2 k'''k'' - \frac{2}{3}\pi(a''k''')^2 . \frac{1}{2}k'''k'' =$$

$$= \frac{1}{3}2\pi.Ch''.k'''k''.Ch'' = \frac{1}{3}s'':Ch''.$$

Poniamo per ipotesi che si abbia $Aa = aa' = a'a''$, sarà $Ch = Ch' = Ch''$, e quindi

$$v + v' + v'' = \frac{1}{3}(s + s' + s'')Ch.$$

475. Ritorniamo ora alla *fig. 180.*ª ritenendo le stesse denominazioni stabilite sopra nel numero 473. Dal detto finora risulta che un qualunque semipoligono regolare $FABC$ iscritto nel semicerchio $FTT'C$ genererà girando intorno al diametro FC un solido P tale che sia

$$P = \frac{1}{3}S.OI;$$

e che il semipoligono regolare $F'A'B'C'$ circoscritto al medesimo semicerchio genererà un solido P' tale che sia

$$P' = \frac{1}{3} S'.OT.$$

È dunque

$$\frac{P'}{P} = \frac{S'}{S} \cdot \frac{OT}{OI}.$$

Ma i rapporti $\frac{S'}{S}$, $\frac{OT}{OI}$ si accostano indefinitamente alla unità, ove si faccia crescere all' infinito il numero dei lati dell' uno e dell' altro poligono; adunque anche il rapporto $\frac{P'}{P}$ in questa stessa supposizione si accosterà sempre più alla unità; dovrà quindi la sfera Q considerarsi come il limite di ambedue i solidi P, P'. Laonde l' una o l' altra delle espressioni di questi solidi darà nel limite

$$Q = \frac{1}{3} \Sigma.r = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Da questa espressione conseguitano i seguenti corollarii.

1.° Le sfere sono come i cubi dei raggi o dei diametri.

2.° Se oltre il cilindro circoscritto alla sfera (473. 2.°), si concepisca un cono retto il quale abbia l'asse uguale al diametro della sfera, e la base uguale ad un cerchio massimo della medesima sfera, il cono, la sfera, e il cilindro staranno (463.470) fra loro come

$$\frac{1}{3} \pi r^2.2r : \frac{4}{3} \pi r^3 : \pi r^2.2r, \text{ ossia come } 1:2:3.$$

3.° Il settore sferico σ generato dalla rotazione del settore circolare ACa (*fig. 182.ª*) intorno ad AB, si ottiene dalla seguente proporzione (473.3.°)

$$\frac{4}{3} \pi r^3 : 4\pi r^2 = \sigma : x, \text{ donde } \sigma = \frac{1}{3} xr = \frac{1}{3} \pi.2ry.r = \frac{1}{3} \pi(Aa)^2 r;$$

la solidità cioè di quel settore è uguale alla solidità di un cono che ha per base il cerchio descritto col raggio uguale alla corda Aa, e per altezza il raggio della sfera.

FINE DELLA GEOMETRIA, E DEL TOMO PRIMO.

ERRORI		CORREZIONI
Pag. lin.		
VII. 16.	debole mie forze	deboli mie forze
39. 27.	del sistema metrico decimale	del nuovo sistema metrico
40. 35.	sistema metrico decimale	sistema metrico
42. 2.	togliere 5 decimi da 8	togliere 8 decimi da 5
82. 18—19.	i quali ogni giorno escono al passeggio a tre a tre	dei quali ogni giorno escono al passeggio tre solamente
116. 20.	per 37 ducati	per 97 ducati
141. 28.	175. Si abbia la equazione	Si abbia ora la equazione
ibid. 32.	sono (174)	sono
142. 2.	$y^4-(4h-2)y^3\ldots$	$y^4+(4h-2)y^3\ldots$
ibid. 7.	176. Quantunque	175. Quantunque
144. 11.	$+\ldots+M+1-$	$+\ldots+m(M+1)-$ questo errore è stato corretto in parecchi esemplari
145. 21.	proposta sopra (175)	proposta sopra (174)
164. 21.	tolto il secondo termine (176)	tolto il secondo termine (175)
213. 33.	rappresentiamo non h	rappresentiamo con h
226. 1.	Facciasi $a-b=\delta$	Facciasi $b-a=\delta$

INDICE

DELLE MATERIE CHE SI CONTENGONO IN QUESTO PRIMO TOMO.

LIBRO PRIMO

Aritmetica

LIBRO SECONDO

Algebra

LIBRO TERZO

Geometria







